# 0 Topologische Grundlagen - Topologische Räume und stetige Abbildungen

**Definition** Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $(X, \mathcal{X})$ heißt ein **topologischer Raum** und $\mathcal{X}$ eine **Topologie** auf $X$, falls gilt:

(i) $X \in \mathcal{X}$

(ii) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X} \Longrightarrow \bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{X}$

(iii) $M_1, M_2 \in \mathcal{X} \Longrightarrow M_1 \cap M_2 \in \mathcal{X}$

$O \subseteq X$ heißt **offen**, falls $O \in \mathcal{X}$. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A \in \mathcal{X}$.

Also $\varnothing$, $X$ sind stets sowohl offen, als auch abgeschlossen.

**Definition** Sei $x \in X$, $U \subseteq X$ heißt eine **Umgebung von** $x$, falls es $O \in \mathcal{X}$ gibt mit $x \in O$ und $O \subseteq U$.

**Definition und Bemerkung** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{X}_M := \{M \cap O \mid O \in \mathcal{X}\}$$

eine Topologie auf $M$, die so gennante **Unterraumtopologie auf** $M$ und $(M, \mathcal{X}_M)$ ist ein (topologischer) Unterraum.

**Beispiel** (i) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und

$$\mathcal{X} := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O\},$$

mit $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ offene $\varepsilon$-Kugel um $x$. Dann ist $\mathcal{X}$ eine Topologie auf $X$. Sie heißt die **natürliche Topologie** auf $X$ (bzgl. $d$).

Besonders wichtig: $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $d(x,y) := \|x - y\|$.

**Beweis.** Aufgabe 1 (1 P). ■

(ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ heißt die **diskrete Topologie** auf $X$.

(iii) $(X, \{\varnothing, X\})$. $\{\varnothing, X\}$ heißt die **indiskrete Topologie**.

(iv) $(X, \{O \subseteq X \mid O = \varnothing \text{ oder } X \setminus O \text{ ist endlich}\})$ ist ein topologischer Raum. Sie heißt **cofinite Topologie** auf $X$.

**Beweis.** Aufgabe 2 (1 P). ■

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ heißt eine **Basis** von $\mathcal{X}$, wenn jede Menge in $\mathcal{X}$ sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

**Proposition 0.1** *Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ ist genau dann eine Basis von $(X, \mathcal{X})$, wenn für alle $x \in X$ und alle $O \in \mathcal{X}$ mit $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B$ und $B \subseteq O$.*

**Beweis.** Aufgabe 3 (1 P). ■

**Proposition 0.2 (und Definition)** *Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit*
*(a)* $\bigcup \mathcal{B} = X$
*(b)* $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3$ *und* $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$
*Dann gilt:*
*(a)* $\mathcal{X} := \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ *ist eine Topologie auf X und* $\mathcal{B}$ *ist eine Basis von* $\mathcal{X}$.
*(b)* $\mathcal{X}$ *ist die einzige Topologie auf* $\mathcal{X}$, *die* $\mathcal{B}$ *als Basis hat.*
$\mathcal{X}$ *heißt die von* $\mathcal{B}$ **erzeugte Topologie**.

**Beweis.** Aufgabe 4 (2 P). ■

**Proposition 0.3 (und Definition)** *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann erfüllt die Menge $\mathcal{B}$ aller endlichen Durchschnitte zusammen mit X, also*

$$\mathcal{B} := \{\bigcap E \mid E \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich}, E \neq \varnothing\} \cup \{X\},$$

*offensichtlich die Bedingungen a) und b) aus Proposition 0.2.*
*Die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie $\mathcal{X}$ heißt von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie auf X und $\mathcal{S}$ eine* **Subbasis** *von $\mathcal{X}$.*

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$$

**Umgebungsfilter von** $x$. Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{U}(x)$ heißt eine **Umgebungsbasis von** $x$, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{Z}$ existiert mit $B \in U$.

**Beispiel** In einem metrischen Raum $(X, d)$ ist $\{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von $x$.

**Definition** Ein topologischer Raum erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom (1. AA)**, wenn jeder Punkt eines abzählbare Umgebungsbasis hat.

**Bemerkung** Ein topologischer Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom (2. AA)**, wenn $\mathcal{X}$ eine abzählbare Basis besitzt.

**Folgerung** Ein metrischer Raum erfüllt das 1. AA.

**Proposition 0.4** *Folgende Aussagen sind für einen topologische Räum $(X, \mathcal{X})$ äquivalent:*
*(i)* $O$ *ist offen.*
*(ii)* $O$ *ist Umgebung jeder seiner Punkte.*
*(iii)* *Zu jedem* $x \in O$ *gibt es* $U \in \mathcal{U}(x)$ *mit* $U \subseteq O$.

**Beweis.** Aufgabe 5 (1 P). ■

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.

(i) $x \in X$ heißt ein **Berührungspunkt von** $A$, wenn für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt: $U \cap A \neq \emptyset$.
(ii) $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von $A$, wenn $A \in \mathcal{U}(x)$.

**Proposition 0.5 (und Definition)** *(a) Die Menge der Berührungspunkte von $A$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $X$, die $A$ enthält. Sie heißt* **Abschluss von** $A$ *oder die* **abgeschlossene Hülle von** $A$ *und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.*
*Also gilt: $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die $A$ enthalten.*

*(b) Die Menge der inneren Punkte von $A$ ist die größte offene Menge von $X$, die in $A$ enthalten ist. Sie heißt der* **offene Kern von** $A$ *und wird mit $\mathring{A}$ bezeichnet.*
*Also ist $\mathring{A}$ die Vereinigung aller offenen Mengen, die in $A$ enthalten sind.*

*(c) Die Menge* $\operatorname{bd} A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$ *heißt der* **(topologische) Rand** *von $A$.*

**Beweis.** Aufgabe 6 (2 P). ∎

**Definition** Seien $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ Topologien auf $X$ mit $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$. Dann heißt $\mathcal{X}_2$ **feiner** als $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_1$ **gröber** als $\mathcal{X}_2$.

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. $A$ heißt **dicht** in $X$, falls $\overline{A} = X$.

**Definition** Seien $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $f$ heißt

(i) **stetig**, wenn für alle $O \in \mathcal{Y}$ gilt: $f^{-1}(O) \in \mathcal{X}$
(ii) **offen**, wenn für alle $O \in \mathcal{X}$: $f(O) \in \mathcal{Y}$
(iii) **abgeschlossen**, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ gilt, dass $f(A)$ abgeschlossen.
(iv) ein **Homöomorphismus**, wenn $f$ bijektiv und $f, f^{-1}$ stetig sind.
(v) eine **Einbettung**, wenn die Einschränkung von $f$ auf das Bild ein Homöomorphismus ist, d.h. wenn $f\big|^{f(X)}$, also $f\big| : X \to f(X)$, ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{X})$ nach $(f(X), \tilde{\mathcal{Y}})$ ist, wobei $\tilde{\mathcal{Y}}$ die Unterraumtopologie auf $f(X)$ ist.

Offensichtlich gilt:

(a) Die Komposition von stetigen Abbildungen ist wieder stetig.
(b) Wenn $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ stetig ist und $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}$, dann ist auch $f : (X, \mathcal{X}_1) \to (Y, \mathcal{Y}_1)$ stetig.
(c) $f$ ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn $f$ bijektiv, stetig und offen ist.

**Definition** Seien $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt **stetig in einem Punkt** $x \in X$, wenn zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $f(U) \subseteq V$.

**Proposition 0.6** *Seien $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt: $f$ ist genau dann stetig, wenn $f$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

**Beweis.** Aufgabe 7 (2 P). Verwende Proposition 0.4. ■

**Definition** Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ heißen **homöomorph** oder **topologisch äquivalent**, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.
**Notation** $(X, \mathcal{X}) \cong (Y, \mathcal{Y})$

**Definition** Sei $A \subseteq X$. Eine **Umgebung von** $A$ ist eine Menge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, so dass es ein $O \in \mathcal{X}$ gibt mit $A \subseteq O \subseteq U$.

**Proposition 0.7** *Seien $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{Y}$. Dann ist $f$ genau dann stetig, wenn für alle $O \in \mathcal{S}$ gilt: $f^{-1}(O) \in \mathcal{X}$.*

**Beweis.** Klar, da $f^{-1}$ mit beliebigen Vereinigungen und Durchschnitten verträglich ist. ■

## Trennungseigenschaften

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. Er heißt ein

(1) $T_1$**-Raum**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt, es gibt $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$ mit $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, aber $x_2 \notin O_1$, $x_1 \notin O_2$.
(2) $T_2$**-Raum** oder **Hausdorff-Raum**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt, es gibt $O_1, O_2 \in \mathcal{X} : x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(3) $T_3$**-Raum**, falls für alle $A \subseteq X$, $A$ abgeschlossen, $x \in X \setminus A$ gilt, es gibt $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$ mit $A \subseteq O_1$, $x \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(4) $T_4$**-Raum**, falls für alle $A_1, A_2 \subseteq X$ mit $A_1, A_2$ abgeschlossen und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt, es gibt $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$ mit $A_1 \subseteq O_1$, $A_2 \subseteq O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(3a) $T_{3a}$**-Raum**, falls für alle $A \subseteq X$, $A$ abgeschlossen, $x \in X \setminus A$ gilt, es gibt eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(A) \subseteq \{0\}$.

- **regulär**, falls er ein $T_1$ und $T_3$-Raum ist.
- **vollständig regulär**, falls er $T_1$ und $T_{3a}$-Raum ist.
- **normal**, falls er ein $T_1$ und $T_4$-Raum ist.

**Proposition 0.8** *$(X, \mathcal{X})$ ist genau dann ein $T_1$-Raum, wenn die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind.*

**Beweis.** $\Longrightarrow$ Zu $x \in X$ betrachte für jedes $y \in X \setminus \{x\}$ eine offene Menge $O_y$ mit $y \in O_y$, $x \notin O_y$. Dann ist

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y = X \setminus \{x\}$$

offen, also $\{x\}$ abgeschlossen.

$\Longleftarrow$ Die beiden offenen Mengen sind $X \setminus \{x_2\}$ und $X \setminus \{x_1\}$. ■

**Bemerkung** Sei $X$ Menge. Die cofinite Topologie ist die gröbste Topologie, so dass $(X, \mathcal{X})$ ein $T_1$-Raum ist. Falls $X$ unendlich ist, ist $(X, \mathcal{X})$ mit $\mathcal{X}$ cofinite Topologie ein $T_1$-Raum, aber kein $T_2$-Raum.

**Proposition 0.9** $T_{3a} \Longrightarrow T_3$.

**Beweis.** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein $T_{3a}$-Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \in X \setminus A$. Dann gibt es $f : X \to [0,1]$ stetig und $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(x) = 1$. Dann sind $f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$ und $f^{-1}\left((\frac{1}{2}, 1]\right)$ offene disjunkte Umgebungen von $A$ bzw. $x$. ■

**Satz 0.10 (Tietze und Urysohn)** *Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

*(i)* *$(X, \mathcal{X})$ ist normal.*

*(ii)* *Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und jede stetige Abbildung $f : A \to [0,1]$ (bzgl. der Unterraumtopologie auf A) gibt es eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : X \to [0,1]$, wobei Fortsetzung heißt: $\overline{f}(a) = f(a)\ \forall a \in A$.*

**Beweis.** Elementar, trickreich und relativ lang (1 – 2 Doppelstunden). ■

**Folgerung 0.11** $\boxed{\textit{normal} \underset{0.8}{\overset{0.10}{\Longrightarrow}} \textit{vollständig regulär} \overset{0.9}{\Longrightarrow} \textit{regulär} \overset{0.8}{\Longrightarrow} T_2 \overset{\textit{trivial}}{\Longrightarrow} T_1}$

*Wähle als abgeschlossene Menge $A \cup \{x\}$ und als stetige Abbildung $f : A \cup \{x\} \to [0,1]$ mit $f(a) = 0\ \forall a \in A$ und $f(x) = 1$.*

**Proposition 0.12** *Ein metrischer Raum ist normal.*

**Beweis.** Aufgabe 8 (3 P). ■

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ eine Folge. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $x \in X$, falls für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$ ist endlich (fast alle Folgenglieder liegen in $U$).

**Beispiel** Sei $X$ eine unendliche Menge und $\mathcal{X}$ die cofinite Topologie auf $X$. Dann ist $(X, \mathcal{X})$ ein $T_1$-Raum, aber kein $T_2$-Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ konvergiert gegen *jeden* Punkt in $X$.

**Proposition 0.13** *Sei $X$ ein $T_2$-Raum. Dann konvergiert eine konvergente Folge gegen genau einen Punkt.*

**Beispiel** Sei $X$ mit $\operatorname{card} X \geqslant 2$. Dann ist $(X, \{\varnothing, X\})$ ein $T_3$- und $T_4$-Raum, aber kein $T_1$-Raum.

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** (von $X$) ist eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ mit $\bigcup \mathcal{M} = X$.
Ein topologischer Raum heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. wenn für alle $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ mit $\bigcup \mathcal{M} = X$ eine endliche Teilmenge $E \subseteq \mathcal{M}$ existiert, mit $\bigcup E = X$.
Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ($T_2$) ist.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn $A$ mit der Unterraumtopologie kompakt ist.

**Satz 0.14** *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

**Proposition 0.15** *Sei $(X, \mathcal{X})$ kompakt und $A \subseteq X$. Dann gilt: $A$ ist genau dann kompakt, wenn $A$ abgeschlossen ist.*

**Beweis.** Aufgabe 9 (4 P). ■

**Definition** Ein $T_2$-Raum $X$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 0.16** *Sei X ein $T_2$-Raum. Dann gilt*
*(a) Falls X kompakt ist und das 1. AA erfüllt, dann ist er folgenkompakt.*
*(b) Falls X folgenkompakt ist und das 2. AA erfüllt, dann ist er kompakt.*

$$\textit{kompakt} \quad \underset{2.AA}{\overset{1.AA}{\leftrightarrows}} \quad \textit{folgenkompakt}$$

**Beweis.** Übung. ■

**«Meta-Defintion»** Sei $E$ eine Eigenschaft eines topologischen Raumes. Man sagt $X$ hat die Eigenschaft «lokal-$E$», falls für jeden Punkt $x$ und jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $V \subseteq U$, so dass $V$ (mit Unterraumtopologie) die Eigenschaft $E$ hat.

**Proposition 0.17** *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt X ist genau dann quasikompakt, wenn für jede (nichtleere) Familie $(A_i)_{i \in E}$ von abgeschlossenen Mengen gilt: Falls $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche (nichtleere) Teilmenge $E \subseteq I$, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

**Beweis.** Aufgabe 10 (1 P). ■

**Proposition 0.18** *Sei X ein $T_2$-Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in X \setminus K$ eine Umgebung $U$ von $K$ und eine Umgebung $V$ von $x$ mit $U \cap V = \emptyset$.*

**Beweis.** Aufgabe 11 (3 P). *Hinweis:* Löse erst Aufgabe 11 und folgere die eine Richtung in Aufgabe 9. ■

**Proposition 0.19** *Ein kompakter Raum ist normal.*

**Beweis.** Aufgabe 12 (3 P). *Hinweis:* Aufgabe 11 und Aufgabe 9 können verwendet werden. ■

**Proposition 0.20** *Sei $X$ quasikompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt:*
*(a) $f(X)$ ist quasikompakt.*
*(b) Falls $Y$ ein Hausdorff-Raum ist, dann ist $f$ abgeschlossen.*
*(c) Falls $Y$ ein Hausdorff-Raum ist und $f$ bijektiv, dann ist $f$ ein Homöomorphismus.*

**Beweis.** Aufgabe 13 (3 P). ■

**Proposition 0.21** *Ein topologischer Raum $X$ ist ein $T_3$-Raum genau dann, wenn für jeden Punkt die abgeschlossenen Umgebungen von $x$ eine Umgebungsbasis bilden.*

**Beweis.** Aufgabe 14 (2 P). ■

**Proposition 0.22** *Ein Unterraum eines $T_1$-, $T_2$-, $T_3$- bzw. $T_{3a}$-Raumes ist ein $T_1$-, $T_2$-, $T_3$- bzw. $T_{3a}$-Raum.*

**Beweis.** Aufgabe 15 (1 P). Zeige es für $T_3$. ■

**Achtung** Ein Unterraum eines normalen Raumes **braucht nicht** normal zu sein. Ein *abgeschlossener* Unterraum eines normalen Raumes ist jedoch stets normal.

**Definition** Ein topologischer Raum $X$ heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

**Bemerkung** Also folgt aus $X$ kompakt, dass $X$ lokalkompakt ist.

**Satz 0.23** *Ein lokalkompakter Raum ist vollständig regulär.*

**Bemerkung** In einem lokalkompakten Raum gilt: Zu jedem Punkt und jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es eine kompakte Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U$.

**Beweis.** Sei $X$ lokalkompakt und $x \in X$. Dann gibt es $W \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig. Es gilt: $X$ lokalkompakt $\overset{P0.23}{\Longrightarrow}$ $X$ ist $T_{3a}$ $\overset{P0.9}{\Longrightarrow}$ $X$ ist $T_3$ $\overset{P0.21}{\Longrightarrow}$ es gibt eine abgeschlossene Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U \cap W \xRightarrow[W \text{ kompakt}]{U \subseteq W \text{ abg.}} V$ kompakt. ■

**Definition** Ein topologischer Raum $X$ heißt **metrisierbar**, falls es eine Metrik $d$ auf $X$ gibt, so dass die zu $d$ gehörige natürliche Topologie mit der gegebenen Topologie auf $X$ übereinsteimmt.

**Satz 0.24** *Ein regulärer Raum, der das 2. AA erfüllt, ist metrisierbar.*

## Zusammenfassung

$$\begin{tikzcd}
\text{folgenkompakt} \arrow[r, shift left, "\text{2. AA}"] & \text{kompakt} \arrow[l, shift left, "\text{1. AA}"] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{normal} \arrow[d, Rightarrow] & \text{metrisierbar} \arrow[l, Rightarrow] \\
 & \text{lokalkompakt} \arrow[r, Rightarrow] & \text{vollständig regulär} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & \text{regulär} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[uur, "\text{2. AA}"'] & \\
 & & T_2 \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & T_1 &
\end{tikzcd}$$

## Zusammenhangsbegriffe

**Definition** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ heißt **zusammenhängend**, falls $\varnothing, X$ die **einzigen** Mengen sind, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind.

**Bemerkung** (1) Der diskrete Raum $(X, \mathcal{P}(X))$ mit $\operatorname{card} X \geqslant 2$ ist **nicht** zusammenhängend.

(2) Der indiskrete Raum $(X, \{\varnothing, X\})$ ist zusammenhängend.

(3) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der natürlichen Topologie ist nicht zusammenhängend, denn $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ sind offen und abgeschlossen in der Unterraumtopologie.

**Proposition 0.25** $[0,1]$ *ist zusammenhängend.*

**Beweis.** Mit dem Zwischenwertsatz: Angenommen $[0,1]$ wäre nicht zusammenhängend und $A \subseteq [0,1]$ wäre in $[0,1]$ offen und abgeschlossen und $A \neq \varnothing$, $[0,1] \neq A$. Dann wäre die Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz. ∎

**Definition** Bezeichne $I := [0,1]$ mit der natürlichen Topologie. Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein **Weg** in $X$ ist eine stetige Abbildung $w : I \to X$. $w(0)$ heißt der **Anfangspunkt** und $w(1)$ der **Endpunkt** von $w$.

**Definition** Ein topologischer Raum $X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein Weg $w : I \to X$ existiert mit $w(0) = x$, $w(1) = y$.

**Proposition 0.26** *Sei $X$ ein topologischer Raum und $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt für $f(X)$:*

*(a) Falls $X$ zusammenhängend ist, dann ist $f(X)$ zusammenhängend (mit der Unterraumtopologie).*

*(b) Falls $X$ wegzusammenhängend ist, dann ist $f(X)$ wegzusammenhängend.*

**Beweis.** Aufgabe 16 (2 P). ∎

**Proposition 0.27** *Wenn $X$ wegzusammenhängend ist, dann ist $X$ zusammenhängend.*

**Beweis.** Aufgabe 17 (1 P). *Hinweis:* Folgere aus Proposition 0.26. ∎

**Definition** Ein topologischer Raum $X$ heißt **lokal zusammenhängend (lokal wegzusammenhängend)**, falls zu jedem $x \in X$ und jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ eine zusammenhängende (wegzusammenhängende) Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $V \subseteq U$.
Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine nichtleere maximale (bzgl. $\subseteq$) zusammenhängende (wegzusammenhängende) Teilmenge heißt eine **Zusammenhangskomponente (Wegzusammenhangskomponente)**.

**Proposition 0.28** *Sei $X$ ein topologischer Raum und $A_1, A_2 \subseteq X$ mit $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Falls $A_1$ und $A_2$ zusammenhängend (wegzusammenhängend) sind, dann ist auch $A_1 \cup A_2$ zusammenhängend (wegzusammenhängend).*

**Beweis.** Aufgabe 18 (2 P). ∎

**Folgerung** Die Zusammenhangskomponenten bzw. Wegzusammenhangskomponenten bilden eine Zerlegung eines topologischen Raumes.

**Proposition 0.29** *Sei $X$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ zusammenhängend und $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Dann ist auch $B$ zusammenhängend.*

**Beweis.** Aufgabe 19 (2 P). ∎

**Bemerkung** Nach Proposition 0.27 folgt $X$ lokal wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $X$ lokal zusammenhängend.

**Beispiel**

(i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten sind die einelementigen Mengen.

(ii) $(X, \mathcal{P}(X))$ (diskrete Topologie) mit $\operatorname{card} X \geqslant 2$ ist nicht zusammenhängend, aber lokal wegzusammenhängend.

(iii) $X = \left\{\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \cup \{(0,0)\}$ ist zusammenhängend ($\rightsquigarrow$ 0.26, 0.28 und 0.29), aber nicht wegzusammenhängend und nicht lokal zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente ist $X$ (da $X$ zusammenhängend). Die Wegzusammenhangskomponenten von $X$ sind

$$\left\{\left(t, \sin\tfrac{1}{t}\right) \mid t < 0\right\}, \{(0,0)\}, \left\{\left(t, \sin\tfrac{1}{t}\right) \mid t > 0\right\}.$$

(iv) Kegel in $\mathbb{R}^2$ mit Spitze $(0,1)$, Basis $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0)\}$.
$X$ ist wegzusammenhängend. $X$ ist nicht lokal zusammenhängend, betrachte z. B. $X = (0,0)$, $U = X \cap \left(\mathbb{R} \times \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right)$.

**Also** wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ zusammenhängend
lokal wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ lokal zusammenhängend

**Konvention** Wenn $X$ ein topologischer Raum ist, $A \subseteq X$, betrachte $A$ als mit der Unterraumtopologie versehen.

**Mengentheoretische Schreibweise** $\dot{\bigcup}_{i \in \mathcal{I}} A_i := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \times \{x_i\}$ (**disjunkte Vereinigung**)

## Initiale und finale Topologie

**Definition und Bemerkung** Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume, $i \in \mathcal{I}$ und $f_i : M \to X_i$ eine Familie von Abbildungen. Dann ist

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{X}_i\}$$

eine Subbasis der gröbsten Topologie auf $M$, sodass alle $f_i$ ($i \in \mathcal{I}$) stetig sind. Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie auf $M$ heißt **initiale Topologie** auf $M$ (bzgl. der $f_i$ und $(X_i, \mathcal{X}_i)$).

**Beweis.** Klar. ∎

**Beispiel** (1) Falls $M \subseteq X$ und $i : M \to X$ die Inklusionsabbildung ($i(x) = x$ für alle $x \in M$) ist, dann ist die initiale Topologie auf $M$ die Unterraumtopologie, denn $i^{-1}(A) = A \cap M$.

(2) **Definition Produktraum** Sei $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ (kartesisches Produkt) und $p_i : X \to X_i$ die Projektionen. Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume. Dann heißt $(X, \mathcal{X})$ mit der initialen Topologie $\mathcal{X}$ bzgl. der $p_i$ der **Produktraum** und $\mathcal{X}$ die **Produkttopologie**.
**Bemerkung** Eine Basis der Produkttopologie besteht also aus Mengen der Form

$$\left\{\prod_{i \in \mathcal{I}} O_i \mid O_i \in \mathcal{X}_i \text{ und } O_i = X_i \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in \mathcal{I}\right\}$$

**Satz 0.30** *Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen und $\mathcal{X}$ die Initialtopologie auf $M$. Dann gilt: Für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{Y})$ und jede Abbildung $g : Y \to M$ gilt: $g$ ist genau dann stetig (bzgl. $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{X}$), wenn die Komposition $f_i \circ g$ stetig ist für jedes $i \in \mathcal{I}$.*

**Beweis.**

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & M \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Da die $f_i$ nach Definition der Initialtopologie stetig sind, ist mit $g$ auch $f_i \circ g$ stetig.
Sei nun $f_i \circ g$ stetig für jedes $i \in \mathcal{I}$. Sei

$$S \in \mathcal{S} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \left\{ f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{X}_i \right\},$$

dann gibt es ein $i \in \mathcal{I}$ und ein $O_i \in \mathcal{X}_i$ mit $S = f_i^{-1}(O_i)$. Also

$$g^{-1}(S) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{Y},$$

da $f_i \circ g$ stetig ist. ∎

**Definition und Bemerkung** Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume und $f_i : X_i \to M$ $(i \in \mathcal{I})$ eine Familie von Abbildungen. Dann ist

$$\mathcal{X} := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \left\{ O \subseteq M \mid f_i^{-1}(O) \in \mathcal{X}_i \right\}$$

die feinste Topologie auf $M$, sodass alle $f_i$ stetig sind. Sie heißt die **Finaltopologie** auf $M$ (bzgl. der $f_i$ und $(X_i, \mathcal{X}_i)$).

**Beweis.** Klar, da $f^{-1}$ beliebige Vereinigungen und Durchschnitte bewahrt und der Durchschnitt von Topologien wieder eine Topologie ist. ∎

**Beispiele und wichtige Definitionen** (1) Die $X_i$ seien disjunkt, $M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ und die $f_i : X_i \to M$ seien die Inklusionsabbildungen. Dann ist die Finaltopologie offenbar

$$\left\{ \bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i \mid O_i \in \mathcal{X}_i \right\}$$

$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ mit der Finaltopologie heißt die **(topologische) Summe** der $(X_i, \mathcal{X}_i)$.

**Schreibweise** $\sum X_i$ für $\dot\bigcup X_i$ mit der Finaltopologie
$X + Y$ für $X \dot\cup Y$ mit der Finaltopologie, usw.

(2) Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $p : X \to X/R$ die natürliche Abbildung $p(x) = [x]_R$. Dann heißt $(X/R, \tilde{\mathcal{X}})$, wobei $\tilde{\mathcal{X}}$ die Finaltopologie auf $X/R$ bzgl. $p$ mit $(X, \mathcal{X})$ ist, der **Quotientenraum** von $(X, \mathcal{X})$ bzgl. $R$.

Dann ist $p$ stetig und surjektiv. $p$ ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn jede offene (bzw. abgeschlossene) Menge $A \subseteq X$ gilt: $p^{-1}p(A)$ ist offen (bzw. abgeschlossen).

**Satz 0.31** *Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ topologische Räume und $f_i : X_i \to M$ eine Familie von Abbildungen und $\mathcal{X}$ die Finaltopologie auf M (bzgl. der $f_i$ und $(X_i, \mathcal{X}_i)$). Dann gilt: Für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{Y})$ und jede Abbildung $g : M \to Y$ gilt: $g$ ist genau dann stetig (bzgl. $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$), wenn $g \circ f_i$ für jedes $i \in \mathcal{I}$ stetig ist.*

**Beweis.**

$$\begin{tikzcd} Y & M \arrow[l, "g"'] \\ & X_i \arrow[u, "f_i"'] \arrow[ul, "g\circ f_i"] \end{tikzcd}$$

Da die $f_i$ nach Definition der Finaltopologie stetig sind, ist mit $g$ auch $g \circ f_i$ stetig.
Sei nun $g \circ f_i$ stetig für jedes $i \in \mathcal{I}$. Sei $O \in \mathcal{Y}$. Dann ist

$$f_i^{-1}\left(g^{-1}(O)\right) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{X}_i$$

für alle $i \in \mathcal{I}$, also $g^{-1}(O) \in \mathcal{X}$. Also ist $g$ stetig. ∎

**Definition** Sei $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Dann heißt die Finaltopologie auf $Y$ bzgl. $f$ auch die **Identifizierungstopologie** bzgl. $f$.
Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ($X, Y$ topologische Räume) heißt eine **identifzierende Abbildung**, falls die Topologie auf $Y$ die Identifizierungstopologie bzgl. $f$ ist, d.h. wenn $A \subseteq Y$ genau dann offen ist, wenn $f^{-1}(A)$ offen in $X$ ist.

Seien $X, Y$ topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Bezeichne $R(f)$ die Äquivalenzrelationen

$$R(f) = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$$

und $\overline{f} : X/R(f) \to Y$ die eindeutig bestimmte bijektive Abbildung mit $\overline{f} \circ p = f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/R(f) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$f$ ist genau dann identifizierend, wenn wenn $\overline{f}$ ein Homöomorphismus ist. $X/R(f)$ trägt die finale Topologie bzgl. $p$.

**Bemerkung 0.32** Seien $X, Y$ topologische Räume und $R$ bzw. $S$ Äquivalenzrelation auf $X$ bzw. $Y$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die mit $R$ und $S$ verträglich ist, d.h. aus $(x,y) \in R$ folgt $(f(x), f(y)) \in S$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\overline{f} : X/R \to Y/S$ mit $\overline{f} \circ p_R = p_s \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_R"'] & Y \arrow[d, "p_S"] \\ X/R \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & Y/S \end{tikzcd}$$

nach Satz 0.31 ($X/R$ hat die finale Topologie bzgl. $p_R$). Ferner gilt: Wenn $f$ ein Homöomorphismus ist und $f$, $f^{-1}$ verträglich mit der Relation sind, dann ist auch $\overline{f}$ ein Homöomorphismus.

**Proposition 0.33** *(a) Jede stetige surjektive und offene (oder abgeschlossene) Abbildung ist identifizierend.*

*(b) Jede stetige surjektive Abbildung eines kompakten Raumes $X$ auf einen $T_2$-Raum $Y$ ist identifizierend.*

*(c) Sei $f : X \to Y$ identifizierend und $g : Y \to Z$ stetig und surjektiv. Dann ist $g$ genau dann identifizierend, wenn $g \circ f$ identifizierend ist.*

**Beweis.** Aufgabe 20 (3 P). *Hinweis:* Proposition 0.20 könnte helfen. ■

**Proposition 0.34** *Sei $X$ ein topologischer Raum und $R$ eine Äquivalenzrelation mit $A \subseteq X/R$. Falls $B := p^{-1}(A)$ offen oder abgeschlossen ist, dann ist die natürliche Bijektion $A \to B/R \cap (B \times B)$ ein Homöomorphismus.*

**Beweis.** Aufgabe 21 (2 P). ■

## Wichtige Konstruktion

Seien $X, Y$ topologische Räume, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ stetig. Sei $R$ auf $X \cup Y$ die von $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ erzeugte Äquivalenzrelation (also $(u,v) \in R$, falls $u = v$ oder $u \in A$ und $v = f(u)$ oder $v \in A$ und $u = f(v)$ oder $u, v \in A$ und $f(u) = f(v)$)

**Bezeichne** $Y \cup_f X = (X+Y)/R$ mit der Quotiententopologie.

**Sprechweise** $Y \cup_f X$ entsteht auf $Y$ **durch Einkleben von** $X$ mit der Klebeabbildung $f$.

Mit Proposition 0.34 folgt:

**Proposition 0.35** *Bezeichne $p : X + Y \to Y \cup_f X$ die natürliche Abbildung.*

*(a) Die Einschränkung $p|_Y : Y \to Y \cup_f X$ ist eine Einbettung.*

*(b) Die Einschränkung* $p\big|_{X \setminus A} X \setminus A \to Y \cup_f X$ *ist eine Einbettung.*

Der Raum $Y \cup_f X$ ist also in natürlicher Weise zerlegt in einen abgeschlossenen Unterraum homöomorph zu $Y$ und einen offenen Unterraum homöomorph zu $X \setminus A$. Durch die Klebeabbildung wird beschrieben, wie sie zusammengefügt sind.

**Proposition 0.36** *Sei* $A \subseteq X$ *abgeschlossen,* $f : X \to Z$ *stetig mit* $\varphi : X \to Z$*,* $\psi : Y \to Z$ *seien stetige Abbildung, mit* $\varphi\big|_A = \psi \circ f$*.*
*Bezeichne* $\varphi + \psi : X + Y \to Z$ *die Abbildung, mit*

$$(\varphi + \psi)(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in X \\ \psi(x) & x \in Y \end{cases}$$

*Dann ist* $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \to Z$ *wohldefiniert und stetig.*

**Beweis.**

$$\begin{tikzcd} X + Y \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \cup_f X \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

ist stetig nach 0.32. ∎

**Bezeichungen** $B^n_\varepsilon(x) \ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$
$B^n(x) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$
$D^n(x) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$
$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$
$X \cong$ Y $X$ ist homöomorph zu $Y$
$X \ncong Y$ $X$ ist nicht homöomorph zu $Y$

**Offensichtlich** $B^n \cong \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto \dfrac{x}{1 - \|x\|}$ (**steregraphische Projektion**)
**Also** $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ ($x \in S^n$ beliebig).

**Definition** Ein topologischer Raum, der homöomorph zu $B^n$ ist, heißt auch eine $n$**-Zelle**.

**Weitere Beispiele zum Indentifizieren/Klebeabbildung** (1) $X = D^n$, $A = S^{n-1}$, $Y = \{p\}$ einpunktig, $f : A \to \{p\}$ konstant. Dann ist $\{p\} \cup_f D^n \cong S^n$.

(2) $\mathbb{R}P^n := S^n/R$ (Schreibweise $S^n/\pm\mathrm{id}$), wobei $xRy \iff x = y$ oder $x = -y$, d.h. auf $S^n$ werden Antipodenpunkte identiziert.
$\mathbb{R}P^n$ heißt der $n$**-dimensionale reelle projektive Raum**.
$P(\mathbb{R}^{n+1})$ Punkte, 1-dimensionale lineare Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$
Geraden, 2-dimensionale lineare Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$

Wähle als Repräsentanten Einheitsvektoren, identifziere $x$ mit $-x$, dann $X = D^n$, $A = S^{n-1}$, $Y = \mathbb{R}P^{n-1}$, $f : S^{n-1} \to S^{n-1}/R = \mathbb{R}P^{n-1}$. Also $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n$. Dies ergibt rekursiv eine Zerlegung des $\mathbb{R}P^n$ in je eine Zelle der Dimension $0, 1, 2, ..., n$.

Wichtiger Satz vorweg (wird im Folgenden für Folgerungen und Beispiele verwendet) und gegen Ende des Semesters gezeigt (natürlich ohne dafür die Folgerung zu verwenden).

**Satz 0.37 (von der Invarianz des Gebietes)** *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \cong Y$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $Y$ offen im $\mathbb{R}^n$.*

**Folgerungen**

**Satz 0.38 (Invarianz der Dimension)** *Aus $m \neq n$ folgt $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$, $S^m \ncong S^n$, $D^m \ncong D^n$.*

**Beweis.** Für $m < n$ ist $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$, aber $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen in $\mathbb{R}^n$, also nach 0.37 $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$. Wegen $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$, folgt $S^n \ncong S^m$ (für $m \neq n$) nach dem eben Gezeigten. Sei $m < n$ und $f : D^m \to D^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist $\mathring{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zu $f^{-1}\left(\mathring{D}^n\right) \subseteq D^m \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$ (mit $n > m$), $\lightning$ zu 0.37. ∎

**Satz 0.39 (Invarianz des Randes)** *Jeder Homöomorphismus $f : D^n \to D^n$ bildet $S^{n-1}$ auf $S^{n-1}$ ab.*

**Beweis.** Angenommen $x \in S^{n-1}$ und $z = f(x) \in \mathring{D}^n = B^n$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U := B_\varepsilon(z) \subseteq B^n$. Dann wäre $f^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^n$, aber wegen $f^{-1}(U) \subseteq D^n$ und $f^{-1}(U) \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$, $\lightning$ zu 0.37. ∎

## Mannigfaltigkeiten

**Definition** Ein topologischer Raum heißt eine **(topologische)** $n$**-Mannigfaltigkeit**, falls er ein $T_2$-Raum ist, das 2. AA erfüllt und für jeden Punkt $x \in M$ existiert entweder eine offene Umgebung $U$, die homöomorph zu $B^n$ ist oder eine offene Umgebung, die homöomorph zu einem abgeschlossenen Halbraum (selber Dimension) des $\mathbb{R}^n$ ist und so, dass das Bild von $x$ unter dem Homöomorphismus auf dem Rand liegt.

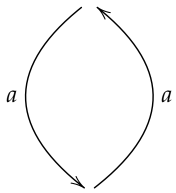
**Definition** Der **Rand (Mannigfaltigkeitsrand, nicht topologischer Rand!)** einer $n$-Mannigfaltigkeit $M$ ist

$$\partial M := \{x \in M \mid x \text{ hat keine offene Umgebung } U \cong B^n\}.$$

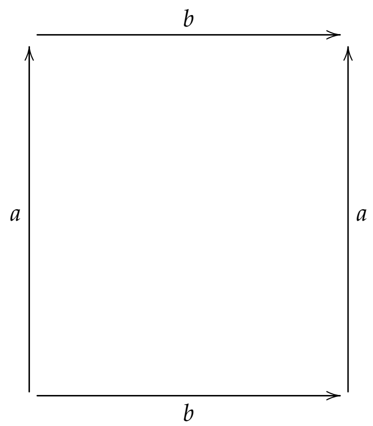
$M$ heißt **unberandet**, falls $\partial M = \emptyset$.
$M$ heißt **geschlossen**, falls $M$ unberandet, kompakt und zusammenhängend ist.
Eine 2-Mannigfaltigkeit heißt auch eine **Fläche**.

Wir werden die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeit vollständig klassifizieren.

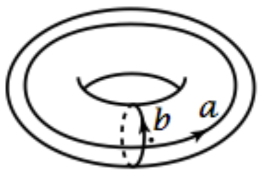
Es gilt: Jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem $2n$-Eck mit paarweiser Identifikation von Kanten. Zum Beispiel




$\cong \mathbb{R}P^2, \quad aa$

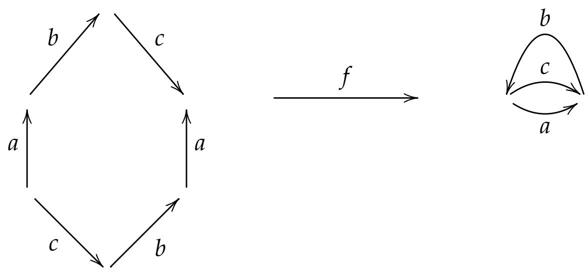



Torus $\cong$




$aba^{-1}b^{-1}$

$\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, mit Äquivalenzrelation $(a,b) \sim (a',b') \iff (a-a', b-b') \in \mathbb{Z}^2$




Torus $\quad abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$

**Satz 0.40 (Satz von Tychonoff)** *Seien $X_i \neq \emptyset$ topologische Räume. $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ ist quasikompakt genau dann, wenn jeder der $X_i$ quasikompakt ist.*

## Weitere Beispiele für Quotientenräume

**Definition** Sei $X$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. $X/A$ bezeichnet den Quotientenraum bzgl. der Relation

$$xRy \iff x = y \text{ oder } x, y \in A.$$

**Definition** Sei $X$ ein topologischer Raum. Der **Kegel** über $X$ ist

$$CX := X \times [0,1] / X \times \{1\},$$

mit Spitze (Punkt) $[X \times \{1\}]_R$,

$$\begin{array}{rcl} X & \to & CX \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array}$$

ist eine Einbettung (beispielsweise $CS^n \cong D^n$, $(x,t) \mapsto x(1-t)$). Die **Einhängung von** $X$ ist

$$EX := X \times [0,1] \big/ X \times \{0,1\}.$$

**Aufgabe 22 (2 P).** Zeige

(a) $f : X \to Y$ stetig induziert eine stetige Abbildung $Ef : EX \to EY$ (1 P).

(b) $ES^n \cong S^{n+1}$ (1 P).

Seien $X_i$ topologische Räume und $x_i \in X_i$ mit $\{x_i\}$ abgeschlossen. Dann heißt

$$VX_i := \sum X_i \big/ A, \text{ mit } A = \{x_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

die **Einpunktvereinigung** der $(X_i, x_i)$ und $[A]$ der «**gemeinsame Punkt**».

**Beispiel** Sei $X_i = [0,1]$, $x_i = 0$, $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ und $X$ die Einpunktvereinigung und $x$ der gemeinsamen Punkte.

**Aufgabe 23 (4 P).** Zeige: $x$ hat keine abzählbare Umgebungsbasis (also erfüllt nicht das 1. AA und ist daher nicht metrisierbar).

**Aufgabe 24 (4 P).** Zeige: $X$ hat keine kompakte Umgebung.