1 Homotopie von Abbildungen

Definition Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ stetig. Dann heißen f und g **homotop**, geschrieben $f \simeq g$, falls es eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$ gibt mit $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$, wobei $I := [0,1]$. F heißt **Homotopie**.

Beispiel

$$\begin{array}{rcl} O : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{id} : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

sind homotop, denn $F(x,t) = tx$ ist eine Homotopie.

Achtung Ob $f \simeq g$ ist, hängt auch entscheidend von Y ab!

Proposition 1.1 *$\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $f : X \to Y$.*

Beweis. (i) $f \simeq f$, denn $F(x,t) := f(x)$, F ist stetig.

(ii) $f \simeq g \Longrightarrow g \simeq f$, wähle $\tilde{F}(x,t) = F(x, 1-t)$.

(iii) $f \simeq g$, $g \simeq h \Longrightarrow f \simeq h$: Seien F_1, F_2 Homotopien von f nach g bzw. g nach h. Dann ist

$$\tilde{F}(x,t) := \begin{cases} F_1(x, 2t) & 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ F_2(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

eine Homotopie, denn $F_1(x,1) = g(x) = F_2(x,0)$ und falls $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ mit $A_i \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn $f|_{A_i}$ stetig ist für $i = 1, \ldots, n$.

∎

Definition Zwei topologische Räume X, Y heißen **homotopie-äquivalent** (oder vom selben **Homotopietyp**), falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. f heißt dann eine **Homotopie-Äquivalenz**.

Schreibweise $X \simeq Y$ falls X, Y homotopie-äquivalent sind.

Proposition 1.2 *(a) $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.*

(b) Seien $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetige Abbildungen und $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, dann gilt: $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Beweis. b) Sei F eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 und G eine Homotopie zwischen g_0 und g_1. Dann ist

$$g_0 \circ F : X \times I \to Z$$

eine Homotopie zwischen $g_0 \circ f_0$ und $g_0 \circ f_1$ und

$$G \circ (f_1 \times \mathrm{id}_I) : X \times I \to Z$$

eine Homotopie zwischen $g_0 \circ f_1$ und $g_1 \circ f_1$, also gibt es nach Proposition 1.1 eine Homotopie zwischen $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$.

a) $X \simeq X$ und $X \simeq Y \Longrightarrow Y \simeq X$ klar. Seien $X \simeq Y$, $Y \simeq Z$,

$$\begin{aligned} f_0 &: X \to Y, \quad f_1 : Y \to X \\ g_0 &: Y \to Z, \quad g_1 : Z \to Y \end{aligned}$$

stetig mit

$$\begin{aligned} f_0 \circ f_1 &\simeq \mathrm{id}, \quad f_1 \circ f_0 \simeq \mathrm{id} \\ g_0 \circ g_1 &\simeq \mathrm{id}, \quad g_1 \circ g_0 \simeq \mathrm{id} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (f_1 g_1)(g_0 f_0) &\overset{b)}{\simeq} f_1 f_0 \simeq \mathrm{id}_X \\ (g_0 f_1)(f_0 g_1) &\overset{b)}{\simeq} g_0 g_1 \simeq \mathrm{id}_Z \end{aligned}$$

■

Lemma 1.3 *Seien $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen, so dass für alle $x \in X$ gilt: Die Verbindungsstrecke zwischen $f(x)$ und $g(x)$ liegen in Y. Dann gilt $f \simeq g$.*

Beweis. Definiere $F : X \times I \to Y$ durch $F(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x)$. Offensichtlich ist $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ und F ist stetig. ■

Corollar 1.4 *Sei X ein topologischer Raum, $f, g : X \to S^{n-1}$ stetig. Falls $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$, dann ist $f \simeq g$.*

Beweis. Betrachte $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung ($f(x) = x$). Dann gibt es nach Lemma 1.3 eine Homotopie $F : X \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zwischen $i \circ f$ und $i \circ g$ (da nach Voraussetzung die Verbindungsstrecke zwischen $f(x)$ und $g(x)$ nicht durch 0 geht). Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1},\ \varphi(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Offenbar ist φ stetig und $\varphi \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Dann ist $\varphi \circ F$ die gesuchte Homotopie zwischen f und g. ■

Beispiel Folgt.

Offensichtlich

$$X \cong Y \underset{\text{i.A.}}{\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}} X \simeq Y$$

Die Einteilung in homotopie-äquivalente Räume ist also wesentlich gröber als die Einteilung in homöomorphe Räume. Die topologischen Invarianten, die wir definieren werden für homotopie-äquivalente Räume übereinstimmen.

Definition (X, A) heißt ein **Paar von Räumen** (oder **Raumpaar**), falls $A \subseteq X$ ein (topologischer) Unterraum ist.
Eine stetige Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ zwischen Paaren von Räumen ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$.
Zwei stetige Abbildungen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ heißen **homotop**, falls es eine stetige Abbildung von Räumen $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ gibt, mit $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$ (also insbesondere $F(a, t) \in B$ für alle $a \in A$, $t \in I$).
Falls $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen von Paaren mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, dann heißen f, g **homotop relativ zu** A, geschrieben $f \simeq g \operatorname{rel} A$, falls es eine Homotopie $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ gibt mit $F(a, t) = f(a) = g(a)$ für $t \in I$, $a \in A$.
Zwei Paare (X, A), (Y, B) heißen **homotopie-äquivalent**, falls es stetige Abbildungen $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (X, A)$ von Paaren gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ (Homotopie von Paaren).

Bemerkung Proposition 1.1, 1.2 gelten entsprechend auch für Paare, Lemma 1.3 ebenfalls (Voraussetzung: die Verbindungsstrecke von $f(x)$, $g(x)$ liege in Y für alle $x \in X$ und in B für $x \in A$).
Ferner ist auch die Relation $\simeq \operatorname{rel} A$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $(X, A) \to (Y, B)$ von Paaren (wobei insbesondere $f \not\simeq g \operatorname{rel} A$, falls $f|_A \neq g|_A$).

Definition Ein Unterraum $A \subseteq X$ heißt ein **Retrakt von** X, falls eine stetige Abbildung $r : X \to A$ existiert mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. r heißt **Retraktion**.

Bezeichne $i : A \to X$ die Inklusionsabbildung.

Definition $r : X \to A$ heißt eine **Deformationsretraktion** und A ein **Deformationsretrakt von** X, falls r eine Retraktion ist und $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$.
Falls sogar gilt $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X \operatorname{rel} A$, dann heißt r eine **starke Deformationsretraktion** und A ein **starker Deformationsretrakt von** X (falls ein solches r existiert).
Ein Raum, der homotopie-äquivalent zu einem Punkt ist, heißt **kontrahierbar**.

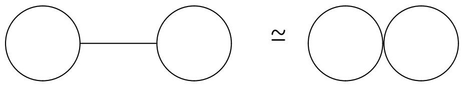
Bemerkung Falls A ein Deformationsretrakt von X ist, dann ist $A \simeq X$.

Beispiele (a) $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar, denn $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ mit $F(x, t) = xt$ ist eine Homotopie. $\{0\}$ ist ein starker Deformationsretrakt des $\mathbb{R}^n$.

(b) S^1 ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $r(x) := \frac{x}{|x|}$.

(c) Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist die konstante Abbildung $x \mapsto x_0$ eine Retraktion und $\{x_0\}$ ein Retrakt, aber z. B. für $X = S^1$ ist $S^1 \not\simeq \{x_0\}$ also $\{x_0\}$ kein Deformationsretrakt von S^1.

Aufgabe 25 (6 P).* Sei $X = C\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right)$ (Kegel). Zeige, dass $\{(0,0)\}$ ein Deformationsretrakt, aber kein starker Deformationsretrakt von X ist.

Aufgabe 26 (5 P). Zeige: 

Alternativ zu 26, Aufgabe 27 (10 P). Sei G ein endlicher zusammenhängnder Graph (ungerichtet, Schleifen und Mehrfachkanten zugelassen). V die Menge der Knoten mit $v = \operatorname{card} V$, E die Mengen der Kanten mit $e = \operatorname{card} E$.

(a) Beschreibe G explizit in natürlicher Weise als topologischen Raum (2 P).

(b) Sei $a \in E$ eine Kante, die keine Schleife ist (mit Endpunkt x, y $(x \neq y)$). Sei G' der Graph, der entsteht, wenn man die Kante a weglassen und x mit y indentifzieren kann. Beweise $G \simeq G'$ (6 P).

(c) Folgere: G $(V \neq \varnothing)$ ist homotopie-äquivalent zum Graphen mit einer Ecke und $e - v + 1$ Kanten (Schleifen) (2 P).