2 Die Fundamentalgruppe

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Ein Weg $w : I \to X$ heißt ein **geschlossener Weg mit Basispunkt** x_0, wenn $w(0) = w(1) = x_0$.

Wir führen auf den Homotopieklassen $\operatorname{rel}\{0,1\}$ von geschlossenen Wegen mit Basispunkt x_0 eine Gruppenstruktur ein.
Seien $u, v : I \to X$ Wege $w(1) = v(0)$, dann sind $uv : I \to X$, $u^{-1} : I \to X$ definiert durch

$$uv(s) := \begin{cases} u(2s) & \text{falls } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ v(2s-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$$u^{-1}(s) := u(1-s)$$

uv und u^{-1} sind stetig (vgl. Argumentation von Satz 1.1).

Proposition 2.1 *(i) u_1, u_2, v_1, v_2 seien Wege in X mit*

$$u_1(0) = u_2(0),$$
$$u_1(0) = u_2(1) = v_1(0) = v_2(0),$$
$$v_1(1) = v_2(1)$$

und mit $u_1 \simeq u_2 \operatorname{rel}\{0,1\}$, $v_1 \simeq v_2 \operatorname{rel}\{0,1\}$, dann gilt

$$u_1v_1 \simeq u_2v_2 \operatorname{rel}\{0,1\},$$
$$u_1^{-1} \simeq u_2^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

(ii) Seien u, v, w Wege in X, sodass uv und vw erklärt sind, dann gilt

$$(uv)w \simeq u(vw) \operatorname{rel}\{0,1\},$$
$$uu^{-1} \simeq e_x \operatorname{rel}\{0,1\},$$

wobei $e_x : I \to X$ die konstante Abbildung $e_x(t) = x$ sei und $x = u(0)$.

Außerdem gilt $e_xu \simeq ue_y \simeq u \operatorname{rel}\{0,1\}$, *mit* $x = u(0)$, $y = u(1)$,
$\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$.

Beweis. (a) Seien F bzw. G Homotopien zwischen u_1 und u_2 bzw. v_1 und v_2 $\operatorname{rel}\{0,1\}$. Dann ist $H : I \times I \to X$ mit

$$H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen u_1v_1 und u_2v_2 $\operatorname{rel}\{0,1\}$. Es ist nämlich

$$F(1,t) = u_1(1) = u_2(1) = v_1(0) = v_2(0) = G(0,t),$$

und $\tilde{F}(s,t) := F(1-s,t)$ ist eine Homotopie zwischen u_1^{-1} und u_2^{-1} $\operatorname{rel}\{0,1\}$.

(b) $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$ ist klar. Wegen Lemma 1.3 gilt für je zwei stetige Abbildungen

$\varphi, \psi : I \to I$ mit $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(1) = \psi(1)$, dass $\varphi \simeq \psi \operatorname{rel}\{0,1\}$. Offenbar ist

$$(uv)w(s) = u(vw)(\varphi(s)),$$

wobei $\varphi : I \to I$ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $\varphi(1) = 1$ und affin dazwischen. Nun ist $\varphi \simeq \mathrm{id}_I \operatorname{rel}\{0,1\}$, also nach Proposition 1.2 (b)

$$(uv)w \simeq u(vw) \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

$e_x u(s) = u(\varphi(s))$, wobei $\varphi : I \to I$ mit $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\varphi(1) = 1$ und affin dazwischen, also $\varphi \simeq \mathrm{id} \operatorname{rel}\{0,1\}$ und $e_x u \simeq u \operatorname{rel}\{0,1\}$. $e_y u \simeq u \operatorname{rel}\{0,1\}$ entsprechend.
$uu^{-1}(s) = u(\varphi(s))$ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $\varphi(1) = 0$, also $\varphi \simeq e_0 \operatorname{rel}\{0,1\}$, also $uu^{-1} \simeq u \circ e_0 = e_x \operatorname{rel}\{0,1\}$. ∎

Schreibweise $u_1u_2\cdots u_n := u_1(u_2(\ldots u_n)\ldots)$

Satz 2.2 (und Definition) *Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. $\pi_1(X,x_0)$ bezeichne die Menge der Homotopieklassen* rel $\{0,1\}$ *geschlossener Wege von X mit Basispunkt x_0. Bezeichne $[w]$ die Äquivalenzklasse von w.*

Definiere $[u]\cdot[v] := [uv]$

Dies ist wohldefiniert und $(\pi_1(X,x_0),\cdot)$ eine Gruppe. Sie heißt die **Fundamentalgruppe von** (X,x_0).

Beweis. (i) Wohldefiniertheit folgt nach Proposition 2.1 (a).
(ii) $(\pi_1(X,x_0),\cdot)$ ist eine Gruppe nach Proposition 2.1 (b). ∎

Satz 2.3 *Seien X, Y topologische Räume mit $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus*

$$\pi_1(f) := f_\sharp : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0) \text{ mit } f_\sharp([w]) = [f \circ w] \text{ für alle } [w] \in \pi_1(X,x_0).$$

Ferner gilt:

(a) Falls $g : Y \to Z$ stetig ist mit $g(y_0) = z_0$, dann gilt $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$.

(b) $(\mathrm{id}_X)_\sharp = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(c) Falls $g : X \to Y$ mit $g(x_0) = y_0$ und falls $f \simeq g \operatorname{rel}\{x_0\}$, dann gilt $f_\sharp = g_\sharp$.

Beweis. $f_\sharp$ eindeutig, ist klar. $f_\sharp$ wohldefiniert, denn aus

$$w_1 \simeq w_2 \operatorname{rel}\{0,1\} \text{ folgt } fw_1 \simeq fw_2 \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

Gruppenhomomorphismus Definiere

$$f \circ (uv)(s) = \begin{cases} f \circ u(2s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ f \circ v(2s-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = (f \circ u) \circ (f \circ v)(s),$$

also $f_\sharp([u][v]) = f_\sharp([u]) \cdot f_\sharp([v])$, also $f_\sharp$ Gruppenhomomorphismus. Ferner:

(a) $(g \circ f)_\sharp([w]) = [g \circ f \circ w] = g_\sharp f_\sharp([w])$

(b) Klar.

(c) $f_\sharp([w]) = [f \circ w] \overset{\text{P1.2 b)}}{=} [g \circ w] = g_\sharp([w])$ ■

Satz 2.4 (und Definition) *Seien $x_0, x_1 \in X$, u ein Weg in X mit $u(0) = x_0$, $u(1) = x_1$. Dann ist*

$$u_+ : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0),\ \textit{mit } u_+([w]) := [uwu^{-1}]$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ferner gilt:

(a) Falls $u \simeq v \operatorname{rel}\{0,1\}$, dann ist $u_+ = v_+$.

(b) $(e_x)_+ = \mathrm{id}$

(c) Sei v ein Weg von x_1 nach x_2. Dann gilt $(uv)_+ = u_+ v_+$.

(d) Sei $f : X \to Y$ stetig und $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$. Dann gilt

$$f_\sharp \circ u_+ = (f \circ u)_+ \circ f_\sharp : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, y_0).$$

Beweis. $w_1 \simeq w_2 \operatorname{rel}\{0,1\} \Longrightarrow uw_1u^{-1} \simeq uw_2u^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\}$, also ist u_+ wohldefiniert.

(a) $u \simeq v \operatorname{rel}\{0,1\} \Longrightarrow uwu^{-1} \simeq uwu^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\}$, also

$$u_+([w]) = [uwu^{-1}] = [vwv^{-1}] = v_+([w]).$$

(b) Klar.

(c) $(uv)w(uv)^{-1} \simeq u\left(vwv^{-1}\right)u^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Gruppenhomomorphismus Es gilt

$$u(w_1w_2)u^{-1} \simeq \left(uw_1u^{-1}\right)\left(uw_2u^{-1}\right) \operatorname{rel}\{0,1\},$$

also ist u_+ ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem

$$\begin{aligned} & uu^{-1}wuu^{-1} \simeq w \operatorname{rel}\{0,1\} \text{ für } [w] \in \pi_1(X, x_0) \\ \Longrightarrow\ & uu^{-1}wuu^{-1} \simeq w \operatorname{rel}\{0,1\} \text{ für } [w] \in \pi_1(X, x_1) \end{aligned}$$

$\left(u^{-1}\right)_+ \circ u_+ = \mathrm{id}$, $u_+ \circ \left(u^{-1}\right)_+ = \mathrm{id}$, also $\left(u^{-1}\right)_+ = (u_+)^{-1}$, also ist u_+ ein Isomorphismus.

zu (d) Es gilt

$$\begin{aligned} f_\sharp \circ u_+([u]) &= f_\sharp\left([uwu^{-1}]\right) \\ [f \circ (uwu^{-1})] &= [(f \circ u)(f \circ w)\left(f \circ u^{-1}\right)] = (f \circ u)_+ \circ f_\sharp([w]) \end{aligned}$$ ■

Folgerung 2.5 Falls X zusammenhängend ist, dann gilt für alle $x_0, x_1 \in X$:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

In diesem Fall schreiben wir auch $\pi_1(X)$ dafür.

Bemerkung 2.6 Falls $[u] \in \pi_1(X, x_0)$, dann ist

$$u_+([w]) = [u][w][u]^{-1},$$

also ist u_+ ein innerer Automorphismus.

Lemma 2.7 *Seien $F : I \times I \to X$ stetig, $u_0, u_1, v_0, v_1 : I \to X$ definiert durch*

$$u_0(t) = F(t,0), \quad u_1(t) = F(t,1)$$
$$v_0(t) = F(0,t), \quad v_1(t) = F(1,t)$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u_1"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v_0"] \arrow[r, "u_0"'] & \cdot \arrow[u, "v_1"'] \end{tikzcd}$$

Dann gilt $u_0 v_1 \simeq v_0 u_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Beweis. $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 : I \to I \times I$ und

$$\tilde{u}_0(t) = (t,0) \quad \tilde{u}_1(t) = (t,1)$$
$$\tilde{v}_0(t) = (0,t) \quad \tilde{v}_1(t) = (1,t),$$

also $u_0 = F \circ \tilde{u}_0$ etc. Offenbar gilt dann $\tilde{u}_0 \tilde{v}_1 \simeq \tilde{v}_0 \tilde{u}_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$ nach Lemma 1.3. Also

$$u_0 v_1 = F \circ \tilde{u}_0 \tilde{v}_1 \simeq F \circ \tilde{v}_0 \tilde{u}_1 = v_0 u_1 \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

■

Satz 2.8 *Seien $f, g : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f und g. Sei $w : I \to X$ definiert durch $w(t) = H(x_0, t)$. Dann gilt $f_\sharp = w_+ \circ g_\sharp$.*

Beweis. Sei $u : I \to X$ stetig mit $u(0) = u(1) = x_0$. Wende 2.7 auf $F = H \circ (u \times \mathrm{id})$ an. Seien

$$u_0(t) := H(u(t),0) = f \circ u(t)$$
$$u_1(t) := H(u(t),1) = g \circ u(t)$$
$$v_0(t) := v_1(t) := H(x_0,t) = w(t)$$

Also

$$\begin{aligned} & (f \circ u) \cdot w \simeq w \cdot (g \circ u) \operatorname{rel}\{0,1\} \\ \Longrightarrow \quad & f \circ u \simeq w \cdot (g \circ u) \cdot w^{-1} \operatorname{rel}\{0,1\} \\ \Longrightarrow \quad & f_\sharp = w_+ g_\sharp \end{aligned}$$

■

Satz 2.9 (Folgerung) $f \circ g \simeq \mathrm{id} \Longrightarrow f_\sharp \circ g_\sharp$ *ist ein Isomorphismus (also insbesondere $g_\sharp$ injektiv, $f_\sharp$ surjektiv).*
Insbesondere: Wegzusammenhängende homotopie-äquivalente topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen: X, Y wegzusammenhängend und $X \simeq Y \Longrightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Definition Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X)$ die triviale (einelementige) Gruppe ist.

Nach Satz 2.8 ist jeder kontrahierbare Raum einfach zusammenhängend (wegzusammenhängend ist leicht zu sehen).

S^1 ist wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ (Beweis später).
S^n für $n \geqslant 2$ ist einfach zusammenhängend, aber nicht kontrahierbar (Beweis später).

Poincaré-Vermutung Jeder einfach zusammenhängende kompakte (unberandete) 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur S^3 (wurde vor wenigen Jahren von Perelman bewiesen).

Crashkurs Gruppentheorie

Normalteiler N Untergruppe von G mit $aN = Na$ (bzw. $N = aNa^{-1}$) $\forall a \in G$

Faktorgruppe $(aN)(bN) = a(Nb)N \overset{Nb=bN}{=} abNN = abN$

natürlicher Homomorphismus $\mathrm{nat}: G \to G/N : g \mapsto gN$

Dann gilt der
Homomorphie-Satz $f : G \to H$ Gruppenhomomorphismus, dann

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{nat}"'] & H \\ G/\ker f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

existiert ein injektiver Homomorphismus $\overline{f}$ mit $f = \overline{f} \circ \mathrm{nat}$. Falls f surjektiv ist, ist $\overline{f}$ ein Isomorphismus.

Freie Gruppe (universelles Problem)

Gegeben sei eine Menge M. Gesucht ist für eine Abbildung i und eine Gruppe $F(M)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & F(M) \arrow[dl, dashed, "\exists!\overline{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

sodass für alle Gruppen G und Abbildungen $f : M \to G$ gilt: es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\overline{f} : F(M) \to G$ mit $\overline{f} \circ i = f$. $F(M)$ heißt die **freie Gruppe** (über M).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] \arrow[ddr, "i_1"] \arrow[dddr, "i_2"'] & F_1(X) \arrow[d, "\exists! f_1"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}"] & & X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & F_1(X) \\
& F_2(X) \arrow[d, "\exists! f_2"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}"] & & & F_2(X) \\
& F_1(X) \arrow[d, "f_1"] & & & \\
& F_2(X) & & &
\end{tikzcd}$$

seien freie Gruppen über X, f_1 ein Gruppenhomomorphismus. Wegen der Eindeutigkeit des Homomorphismus ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{id}_{F_1(X)} = f_2 \circ f_1, \\
&\mathrm{id}_{F_2(X)} = f_1 \circ f_2, \\
&\Longrightarrow f_2 = f_1^{-1} \text{ ein Isomorphismus.}
\end{aligned}$$

Seien w_1, w_2 Worte, $\square$ das leere Wort und $ww^{-1} = w^{-1}w = \square$. Betrachte alle (formalen) Worte über $X \uplus X^{-1}$. Betrachte dann die Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von der Relation $w_1 x x^{-1} w_2 \sim w_1 w_1$ (w_1, w_2 Wörter, $x \in X \uplus X^{-1}$).
Diese Äquivalenzrelation ist mit der Multiplikation verträglich und man erhält damit eine Gruppe mit neutralem Element $\square$.
Alternativ Normalform: «reduziertes Wort»: Kürze solange es geht direkt nebeneinanderstehende Buchstaben xx^{-1} (bzw. $x^{-1}x$). Dies liefert immer dasselbe Ergebnis (das reduzierte Wort $r(w)$).

Proposition Jede Gruppe ist isomorph zur Faktorgruppe einer freien Gruppe.

Beweis. Wähle $g \mapsto g$ als Wort unter einem Buchstaben

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g \mapsto g", "i"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & F(G) \arrow[d, dashed, "\exists! f \text{ Gruppenhomomorphismus, surjektiv}"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Damit

$$\begin{tikzcd}
F(G) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \\
F(G) \big/ \ker i \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f} \text{ Gruppenhomomorphismus (ist injektiv)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen f surjektiv ist $\overline{f}$ ein Isomorphismus. ■

Bemerkung $E \subseteq G$ Erzeugendensystem reicht:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr] & F(G) \arrow[d, dashed] \\ & G \end{tikzcd}$$

Satz (Nielson, Schreier 1927) Untergruppen von freien Gruppen sind frei.

Beispiele Die von $\{a^n b a^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugte Untergruppe von $F(\{a,b\})$ ist isomorph zu $F(\mathbb{N}_0)$ (also nicht endlich erzeugt).

Beweis. Aufgabe 28 (5 P). ■

Definition Eine Darstellung einer Gruppe der Form

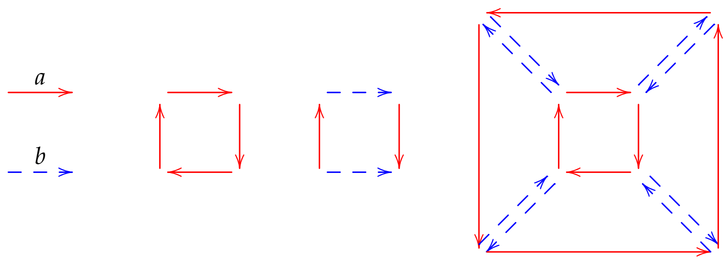
$$F(\{a_1,\dots,a_n\}) \big/ \langle w_1,\dots,w_m \rangle,\ w_1,\dots,w_m \in F(\{a_1,\dots,a_n\}),$$

$\langle \dots \rangle$ erzeugter Normalteiler, heißt eine **endliche Präsentation** der Gruppe.
G heißt **endlich präsentierbar**, falls es E *endliche* Menge, $R \subseteq F(E)$ *endliche* Menge gibt mit $G \cong F(E) \big/ \langle R \rangle$.

Beispiel $G = F(a,b) \big/ \left\langle a^2, b^2 \right\rangle$

Cayley-Diagramm von einer Darstellung der Gruppe durch Erzeugende und Relationen (endliche Präsentationen), $G = F(E) \big/ \langle R \rangle$.
Das **Cayley-Diagramm** ist ein einfach (keine Mehrfachkanten) gerichteter Graph, dessen Knoten (Ecken) die Gruppenelemente sind und dessen (gerichtete) Knoten (v, va) mit $v \in G$, $a \in E$ Kante von v nach w, falls $w = va$ mit einer Knotenfärbung für jedes Erzeugende $a \in E$.

Beispiel $F(a,b) \big/ \langle \{a^n, abab^{-1}, b^2\} \rangle$



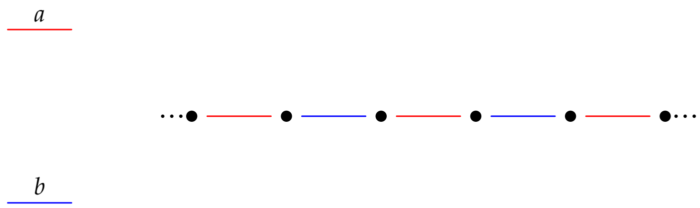
a^4 $\qquad$ $abab^{-1}$ $\qquad$ D_4

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$a^4 = e,\ b^2 = e,\ aba = (1,2)(3,4) = b,\ abab^{-1} = e.$$

Konvention bei $a \in E$ mit $a^2 \in R$. Zeichne die Kante mit Farbe a als ungerichtete Kanten ein.

Beispiel $F(a,b) \big/ \langle a^2, b^2 \rangle$



Aufgabe 29 (5 P). Zeichen Sie das Cayley-Diagramm von $F(a,b) \big/ \langle a^5, b^2, (ab)^3 \rangle$.

Definition Seien G_i, $i \in I$ Gruppen. Das **Coprodukt (freies Produkt)** $\coprod_{i \in I} G_i$ ist eine Gruppe zusammen mit dem Homomorphismus $\varphi_i : G_i \to \coprod_{i \in I} G_i$, sodass für alle Gruppen G und Gruppenhomomorphismen $f_i : G_i \to G$ genau ein Homomorphismus $f : \coprod_{i \in I} G_i \to G$ existiert mit $f \circ \varphi_i = f_i$ für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod_{i \in I} G_i \arrow[dl, dashed, "\exists! f"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit folgt analog wie am Ende des Aschnittes zur freien Gruppe.

Satz (Konstruktion des Coprodukts) Sei $G_i = F(M_i) \big/ \langle R_i \rangle$, M_i paarweise disjunkte Mengen, $R_i \subseteq F(M_i)$. Dann ist $F\left(\dot\bigcup_{i \in I} M_i \right) \Big/ \left\langle \dot\bigcup_{i \in I} R_i \right\rangle$ mit $\varphi_i([w]) = [w]$.

Leicht zu zeigen φ_i ist wohldefiniert und Gruppenhomomorphismus. Sei G eine Gruppe und $f_i : G_i \to G$ Gruppenhomomorphismus. Sei $M = \dot\bigcup_{i \in I} M_i$.
Sei $j : M \to G$ die durch $j(x) := f_i \circ \mathrm{nat} \circ \varphi_i(x)$, falls $x \in M_i$, definierte Abbildung (beachte $M = \dot\bigcup M_i$, deshalb wohldefiniert und total definiert). ■

Bemerkung Das «Wortproblem» für endlich präsentierte Gruppen ist nicht entscheidbar. Es gibt eine endlich präsentierte Gruppen mit nicht entscheidbarem Wortproblem.