3 Simpliziale Komplexe

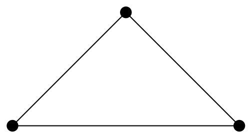
Definition Eine Menge M heißt **affin unabhängig**, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ *und* $\sum_{i=1}^{n} \lambda = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in M$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Bemerkung M ist affin unabhängig $\iff \{x - x_0 \mid x \in M \setminus \{x_0\}\}$ linear unabhängig ist.

Definition Seien $x_0, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$, dann heißt

$$\operatorname{konv}\{x_0, ..., x_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \text{ für alle } i \right\}$$

die **konvexe Hülle** von $\{x_0, ..., x_k\}$. Sie ist die kleinste konvexe Menge, die $\{x_0, ..., x_k\}$ enthält. Die konvexe Hülle von $k+1$ affin unabhängigen Punkten heißt ein k**-Simplex** und k heißt **Dimension** des Simplexes. Die x_i heißen die **Ecken**.



2-Simplex

0-Simplex

Die konvexe Hülle einer m-elementigen Teilmenge von $\{x_0, ..., x_k\}$ heißt $(m-1)$**-Seite** des Simplexes. Falls $0 < m < k+1$ heißt die Seite **eigentliche Seite** (also $\varnothing$ ist eine (-1)-Seite, die 0-Seiten sind genau die Ecken).

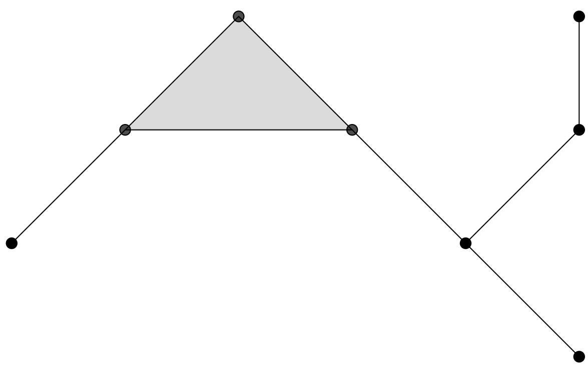
Eine Seite eines Simplexes ist wieder ein Simplex.

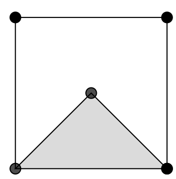
Bemerkung Ein **(geometrischer) simplizialer Komplex** ist eine endliche Menge $\mathcal{K}$ von Simplizes im $\mathbb{R}^n$, sodass gilt:

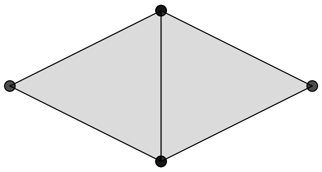
(1) Der Durchschnitt von je zwei Simplizes aus $\mathcal{K}$ ist eine gemeinsame Seite.

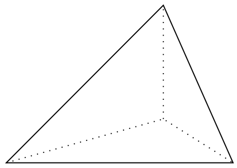
(2) Jede Seite eines Simplexes aus $\mathcal{K}$ ist in $\mathcal{K}$ (also insbesondere $\varnothing$).

Beispiele Simpliziale Komplexe



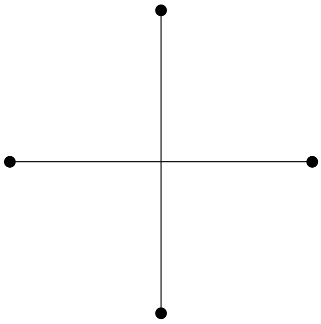




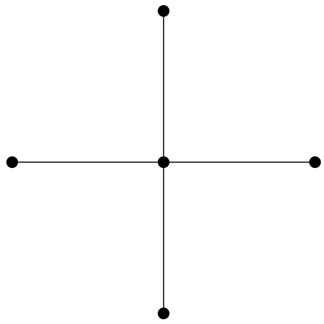


(im $\mathbb{R}^3$)

Hingegen ist

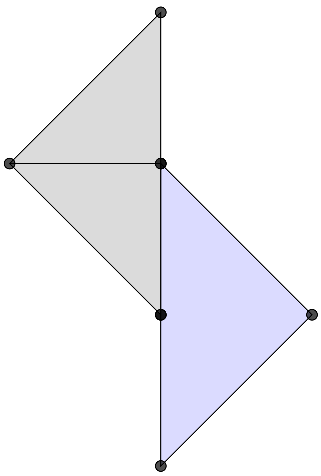


kein simplizialer Komplex[1],

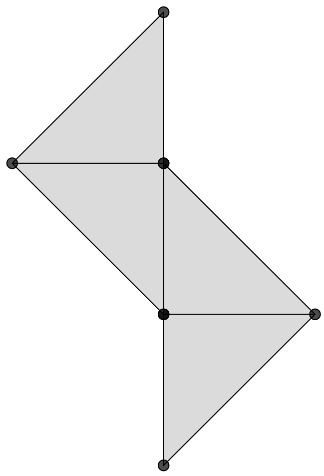


ein simplizialer Komplex,

und



kein simplizialer Komplex[2],



ein simplizialer Komplex.

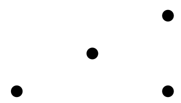
Definition $|\mathcal{K}|$ bezeichne die Vereinigung der Simplizies von $\mathcal{K}$, also $|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}$. $|\mathcal{K}|$ heißt der **Träger** oder das zu $\mathcal{K}$ gehörige **Polyeder**.

Wir betrachten $|\mathcal{K}|$ mit der Unterraumtopologie des $\mathbb{R}^n$.

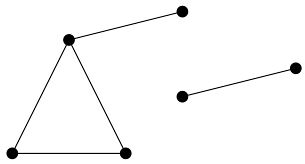
Definition Ein topologischer Raum X heißt **triangulierbar**, falls es einen simplizialen Komplex $\mathcal{K}$ gibt, dessen Träger homöomorph zu X ist, also $X \cong |\mathcal{K}|$.
$(\mathcal{K}, \varphi)$ heißt dann eine **Triangulierung von** X, wobei $\varphi : |\mathcal{K}| \to X$ ein Homöomorphismus ist.
Die **Dimension** von $\mathcal{K}$ ist das Maximum der Dimensionen der Simplizes von $\mathcal{K}$.

[1]Ursprung-«Verbindung» fehlt!
[2]blau gekenntzeichnete Fläche ist ein Viereck!

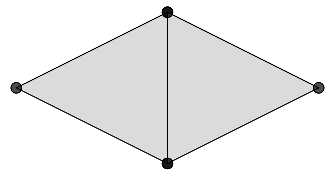
Beispiele



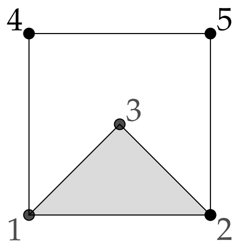
0-dimensional



1-dimensional



2-dimensional



$\{1,2,3\}$
$\{1,4\}$
$\{2,5\}$
$\{4,5\}$

$\{1,2\}$
$\{1,3\}$
$\{2,5\}$

$\{1\}$
$\{2\}$
$\{3\}$
$\{4\}$
$\{5\}$
$\varnothing$

Definition Ein **(abstrakter) simplizialer Komplex** ist eine endliche Menge E zusammen mit einer Menge $S \subseteq \mathcal{P}(E)$, sodass $A \subseteq B$ und $B \in S$ folgt $A \in S$ und $\bigcup S = E$.
Die **Dimension** von $(E, S) := \max\{\operatorname{card} A \mid A \in S\} - 1$.

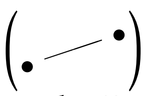
Definition Sei $\mathcal{K}$ ein geometrischer simplizialer Komplex, E die Eckenmenge von $\mathcal{K}$. Sei

$$S := \{A \subseteq E \mid \operatorname{konv} A \in \mathcal{K}\}.$$

Dann ist (E, S) ein abstrakter simplizialer Komplex. Er heißt der **zu $\mathcal{K}$ gehörige abstrakte simpliziale Komplex**.

Definition Zwei (abstrakte) simpliziale Komplexe (E_1, S_1), (E_2, S_2) heißen **kombinatorisch isomorph**, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : E_1 \to E_2$ gibt mit $\varphi[S_1] = S_2$, $\varphi[S_1] = \{\varphi(A) \mid A \in S_1\}$.

Definition Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex definiere das **relative Innere von** M $\operatorname{relint} M$ als das Innere bzgl. der offenen Hülle $\operatorname{aff} M$ von M.

Beispiel relint  ist die Strecke ohne die Endpunkte (egal in welchen $\mathbb{R}^n$ sie liegt). $\operatorname{relint}(\bullet)$ ist der Punkt.

Definition Eine **Realisierung** eines abstrakten simplizialen Komplexes (E, S) ist eine injektive Abbildung $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$, sodass $\{\operatorname{konv} \varphi(M) \mid M \in S\}$ ein geometrischer simplizialer Komplex ist.

Definition und Feststellung 3.0 (a) Die Ecken eines Simplexes G sind genau die Punkte die nicht im relativen Inneren einer in G liegenden Strecke liegen, sind also durch G eindeutig bestimmt.

(b) Die **natürliche Realisierung** eines abstrakten simplizialen Komplexes $(\{a_1, \dots, a_n\}, S)$ ist gegeben durch die Abbildung $\varphi : \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(a_i) = e_i$ (i-ter Standardbasisvektor).

Satz 3.1 *Ein n-dimensionaler abstrakter simplizialer Komplex (E, S) hat eine Realisierung in* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Beweis. Sei $E = \{a_1, \dots, a_k\}$. Wir wählen $\varphi : E \to \mathbb{R}^{2n+1}$ injektiv, sodass für die $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)\}$ in **allgemeiner Lage** liegen, d.h. so, dass je $2n+2$ affin unabhängig sind bzw. $\varphi(E)$ affin unabhängig ist, falls $k < 2n+2$. Dies kann man erreichen durch

$$\varphi(a_r) = X_r := (r, r^2, \dots, r^{2n+1}) \quad (1 \leqslant r \leqslant k).$$

Angenommen $\{X_{r_1}, \dots, X_{r_{2n+1}}\}$ wäre affin abhängig. Dann gäbe es $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+2} \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich 0 mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \cdots + \lambda_{2n+2} &= 0 \\ \lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_{2n+2} r_{2n+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 r_1^{2n+1} + \cdots + \lambda_{2n+2} r_{2n+2}^{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & \cdots & r_{2n+2} \\ r_1^2 & \cdots & r_{2n+2}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{2n+1} & \cdots & r_{2n+2}^{2n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (r_i - r_j) \neq 0,$$

also hat das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung, also sind $X_{r_1}, \dots, X_{r_{2n+2}}$ affin unabhängig und damit $X_1, \dots, X_k$ in allgemeiner Lage.
Wir definieren $\mathcal{K} = \{\operatorname{konv} \varphi(A) \mid A \in S\}$. $\mathcal{K}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (Seiten von Simplizes in $\mathcal{K}$ sind in $\mathcal{K}$.
Seien σ_p, τ_q p bzw. q-dimensionale Simplizes in $\mathcal{K}$ und sei r die Zahl der gemeinsamen Ecken. Dann ist die Zahl der Ecken, die σ_p oder τ_q sind $p+q+2-r \leqslant 2n+2$, also sind die Ecken affin unabhängig und können als Ecken eines $(p+q-r+1)$-Simplexes gewählt werden, welches σ_p und τ_q als Seiten enthält. Also ist $\sigma_p \cap \tau_q$ eine gemeinsame Seite. ∎

Bemerkung Man kann zeigen, dass für $n \geqslant 0$ die Dimension $2n+1$ bestmöglich ist, nämlich z. B. für $\operatorname{card} E = 2n+3$, S = Menge der höchstens $(n+1)$-elementigen Teilmengen ist (E, S) ein n-dimensionaler simplizialer Komplex, der **nicht** in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist.
Für einen gegebenen simplizialen Komplex kann die kleinste Einbettungsdimension kleiner sein.

Definition Ein **Unterkomplex** eines simplizialen Komplexes $\mathcal{K}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$, die die Bedingung (2) erfüllt (nämlich Seiten von Simplizes von $\mathcal{L}$ gehören zu $\mathcal{L}$).
Das r**-Skelett** $\mathrm{Sk}_r(\mathcal{K})$ ist die Menge der höchstens r-dimensionalen Simplizes in $\mathcal{K}$. $\mathrm{Sk}_r(\mathcal{K})$ ist offenbar ein Unterkomplex von $\mathcal{K}$.
Ein **simpliziales Paar** $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ besteht aus einem simplizialen Komplex $\mathcal{K}$ und einem Unterkomplex $\mathcal{L}$ von $\mathcal{K}$.

Beispiel Sei $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$ ist ein n-Simplex. $\{\sigma_n\}$ ist **kein** simplizialer Komplex, aber $K(\sigma_n) :=$ Menge aller Seiten von σ_n ist ein simplizialer Komplex.
$\mathrm{Sk}_{n-1}(K(\sigma_n)) = K(\sigma_n) \setminus \{\sigma_n\}$ heißt der **Randkomplex von** σ_n. Für ein n-Simplex σ_n gilt

$$\operatorname{relint} \sigma_n = \sigma_n \setminus |\mathrm{Sk}_{n-1}(K(\sigma_n))|.$$

Proposition 3.2 *Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ein simpliziales Paar in $\mathbb{R}^m$.*
(a) $|\mathcal{K}|$ ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$
(b) $|\mathcal{L}|$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{K}$.
(c) Falls $\mathcal{M}$ ein Unterkomplex von $\mathcal{K}$ ist, dann sind auch $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ und $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ Unterkomplexe von $\mathcal{K}$.
(d) Eine Teilmenge $X \subseteq |\mathcal{K}|$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Vereinigung der Simplexe $X \cap \sigma$ für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ angeschlossen ist.
(e) Ein Simplex $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine kompakte wegzusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Ein Simplex hat eindeutig bestimmte k-Seiten.
(f) Jeder Punkt von $|\mathcal{K}|$ ist im relativen Inneren genau eines Simplexes von $\mathcal{K}$.

Beweis. Klar (bzw. einfach). ∎

Definition Seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ simpliziale Komplexe. Eine **simpliziale Abbildung** $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ ist eine Abbildung, für die gilt:
(a) Falls $\operatorname{konv}\{a_0, ..., a_n\} \in \mathcal{K}$, dann ist $\operatorname{konv}\{f(a_0), ..., f(a_n)\} \in \mathcal{L}$.
(b) Falls $\operatorname{konv}\{a_0, ..., a_n\} \in \mathcal{K}$, dann gilt für $\lambda_0, ..., \lambda_n \geqslant 0$ mit $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i),$$

d.h. f ist «linear» (genauer affin) auf jedem Simplex.

Bemerkung Nach (a) werden Ecken auf Ecken abgebildet. Eine simpliziale Abbildung ist durch ihre Einschränkung auf die Eckenmenge von $\mathcal{K}$ eindeutig bestimmt (wegen (b)).

Definition Eine simpliziale Abbildung von simpliziale Paaren $f : (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \to (\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ist eine simpliziale Abbildung $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{M}|$ mit $f(|\mathcal{L}|) \subseteq |\mathcal{N}|$.

Es ist klar, dass die Komposition von simplizialen Abbildung wieder eine simpliziale Abbildung ist.

Proposition 3.3 *Eine simpliziale Abbildung $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ ist stetig.*

Beweis. Wenn $X \subseteq |\mathcal{L}|$ abgeschlossen ist, dann ist $X \cap \tau$ abgeschlossen für alle $\tau \in \mathcal{L}$. Aber $f\big|_\sigma$ ist stetig für $\sigma \in \mathcal{K}$, also $f^{-1}(x) \cap \sigma$ abgeschlossen in σ für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$, also ist $f^{-1}(X)$ abgeschlossen (→ Proposition 3.2 d)). ■

Definition Seien $(E_1, \mathcal{K}_1)$, $(E_2, \mathcal{K}_2)$ abstrakte simpliziale Komplexe. Eine **(abstrakte) simpliziale Abbildung** ist eine Abbildung $f : E_1 \to E_2$ mit $f(\sigma) \in \mathcal{K}_2$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}_1$.

Satz 3.4 *Seien $(E_1, \mathcal{K}_1)$, $(E_2, \mathcal{K}_2)$ zwei abstrakte simpliziale Komplexe. Sei $f : E_1 \to E_2$ eine abstrakte simpliziale Abbildung. Seien $\varphi_1 : E_1 \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : E_2 \to \mathbb{R}^m$ Realisierungen von $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ mit geometrischem simplizialen Komplexen $\tilde{\mathcal{K}}_1$ bzw. $\tilde{\mathcal{K}}_2$.*

(a) Dann gibt es eine eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung $\tilde{f} : \left|\tilde{\mathcal{K}}_1\right| \to \left|\tilde{\mathcal{K}}_2\right|$ mit $\tilde{f}(\varphi_1(e)) = \varphi_2(f(e))$ für alle $e \in E_1$.

(b) Falls f injektiv ist, dann ist $\tilde{f}$ eine Einbettung ($f\big|$ ist ein Isomorphismus).

(c) Falls f ein kombinatorischer Isomorphismus ist, dann ist $\tilde{f}$ ein Homomöorphismus.

(d) Falls $(E_3, \mathcal{K}_3)$ auch ein abstrakter simplizialer Komplex ist und $\varphi_3 : E_3 \to \mathbb{R}^k$ eine Realisierung mit $\tilde{\mathcal{K}}_3$ und $g : E_2 \to E_3$ eine abstrakte simpliziale Abbildung ist, dann ist $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{f \circ g}$.

Beweis. (a) Klar mit Proposition 3.1 und der eindeutigen Fortsetzbarkeit einer Abbildung von der Eckenmenge eines Simplexes zu einer affinen Abbildung auf dem Simplex.

(d) Klar wegen der Eindeutigkeit.

(c) f und f^{-1} sind abstrakte simpliziale Abbildungen. Wegen (d) ist

$$\tilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}} \overset{(d)}{=} \widetilde{\mathrm{id}\,\mathcal{K}_1} = \mathrm{id}_{\mathcal{K}_2}$$
$$\widetilde{f^{-1}} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathcal{K}_1},$$

also $\widetilde{f^{-1}} = \left(\tilde{f}\right)^{-1}$, $\tilde{f}$, $\widetilde{f^{-1}}$ sind stetig.

(b) $f\big| : (E_1, \mathcal{K}_1) \to (f(E_1), \{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{K}_1\})$ ist ein kombinatorischer Isomorphismus (f nach Voraussetzung injektiv!). $f = i \circ f\big|$, mit $i : (F(E_1), \{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{K}_1\}) \to (E_2, \mathcal{K}_2)$ die Inklusionabbildung. $\tilde{i}$ ist eine Einbettung. Nun folgt die Behauptung aus (d) und (c).

■

Bemerkung Sei E eine endliche Menge, $S \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit $\bigcup S = E$. Dann ist durch

$$\mathcal{K} := \{\sigma \mid \exists M \in S : \sigma \subseteq M\}$$

ein abstrakter simplizialer Komplex gegeben.

Definition Der **Join** von zwei abstrakten simplizialen Komplexen $(E_1, \mathcal{K}_1)$, $(E_2, \mathcal{K}_2)$ mit $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ist definiert durch

$$(E_1, \mathcal{K}_1) * (E_2, \mathcal{K}_2) := (E_1 \cup E_2, \{\sigma \subseteq E_1 \cup E_2 \mid \sigma \cap E_1 \in \mathcal{K}_1, \sigma \cap E_2 \in \mathcal{K}_2\}).$$

Es ist klar, dass dies ein abstrakter simplizialer Komplex ist. Es gilt

$$\dim(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) = \dim \mathcal{K}_1 + \dim \mathcal{K}_2 + 1.$$

Ferner gilt

$$(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) * \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 * (\mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_3)$$
$$\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_1.$$

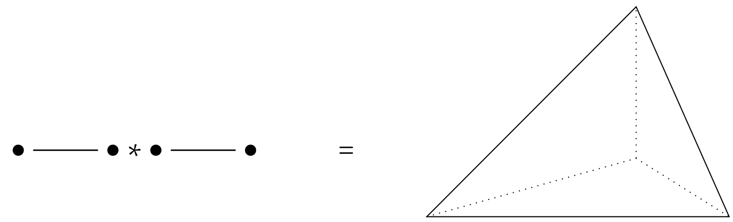
Seien $\varphi_1 : E_1 \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\varphi : E_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$ geometrische Realisierungen der abstrakten simplizialen Komplexe $(E_1, \mathcal{K}_1)$ bzw. $(E_2, \mathcal{K}_2)$. Sei $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Zeige, dass $\varphi : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$ mit

$$\varphi(e) := \begin{cases} (\varphi(e_1), 0, 0) & e_1 \in E_1 \\ (0, \varphi(e_2), 1) & e_2 \in E_2 \end{cases}$$

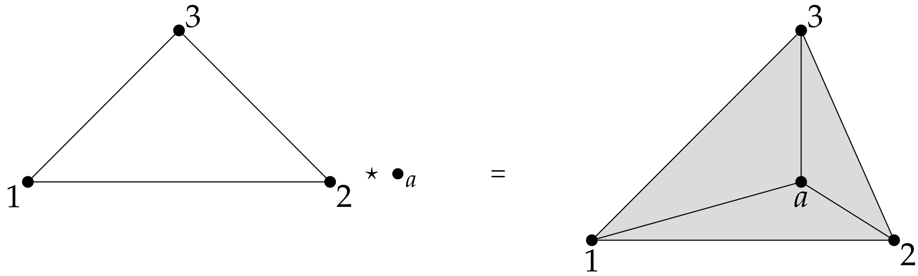
eine geometrische Realisierung von $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ ist.

Beweis. Aufgabe 30 (3 P). ■

Zum Beispiel

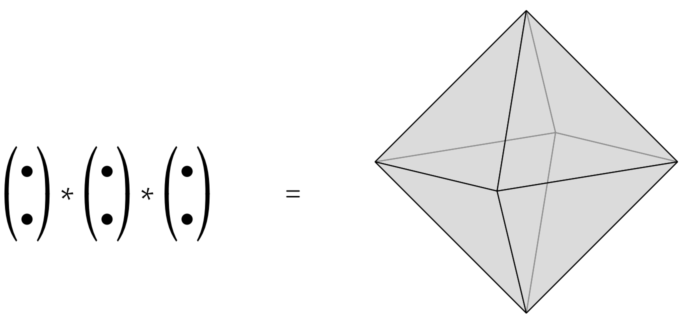


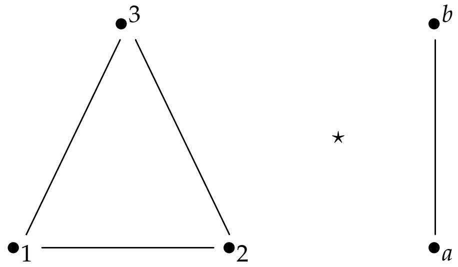
3-Simplex



$\mathcal{K} * \bullet_a$ heißt die Pyramide über $\mathcal{K}$, $(\{a\}, \{\{a\}, \varnothing\})$

$\mathcal{K} * \bullet_a \bullet_b$ Einhängung von $\mathcal{K}$



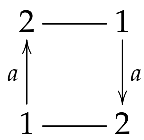


Komplex aus drei Tetraedern

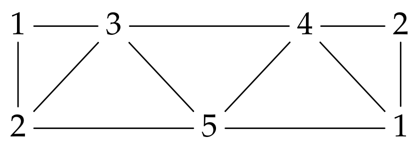
$\{1,2,a,b\},\{1,3,a,b\},\{2,3,a,b\}$

und allen Seiten davon.

Beispiele für 2-dimensionale simpliziale Komplexe und Aufgaben (1) Möbiusband



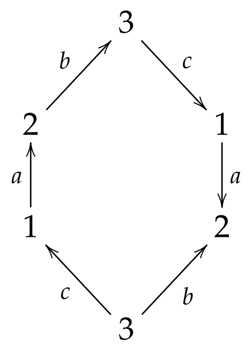
Triangulierung



Aufgabe 31 (2 P). Man gebe eine Realisierung dieser Triangulierung im $\mathbb{R}^3$ an (oder bauen ein Modell (aus Pappe)).

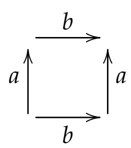
(2) projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$

Aufgabe 32 (3 P). Man finde eine Triangulierung mit 6 Ecken. Hinweis:



Zeige, dass das triangulierte Möbiusband aus 1) in diesen simplizialen Komplex eingebettet werden kann.

(3) Der Torus $S^1 \times S^1$



Aufgabe 33 (5 P). Man finde eine Triangulierung mit 7 Ecken. Hinweis:

$$\begin{array}{ccccccc}
1\bullet & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & \bullet 1 \\
| & & & & & & | \\
3 & & & & & & 3 \\
| & & & & & & | \\
2 & & & & & & 2 \\
| & & & & & & | \\
1\bullet & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & \bullet 1
\end{array}$$

soll auf das Innere des Quadrats forgesetzt werden.

Satz und Definition Bezeichne f_i die Anzahl der i-Seiten eines n-dimensionalen simplizialen Komplexes $\mathcal{K}$. Dann heißt

$$\chi(\mathcal{K}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i$$

die **Euler-Charakteristik von** $\mathcal{K}$. χ ist eine topologische Invariante, d.h.

$$|\mathcal{K}_1| \cong |\mathcal{K}_2| \Longrightarrow \chi(\mathcal{K}_1) = \chi(\mathcal{K}_2).$$

Aufgabe 34 (4 P). Beweise, dass für eine 2-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit gilt:

$$f_0 \geqslant \left\lceil \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 - 24\chi}\right) \right\rceil$$