

4 Simpliziale Approximation

Definition Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex. Für $x \in |\mathcal{K}|$ bzw. für ein $\tau \in \mathcal{K}$ definiere

$$\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \sigma \text{ ist Seite eines } \tau \in \mathcal{K} \text{ mit } x \in \tau\}$$

$$\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \exists \rho \in \mathcal{K} : \tau \subseteq \rho \text{ mit } \sigma \subseteq \rho\}$$

= die Menge der Simplizes in \mathcal{K} , die τ als Seite enthalten, sowie aller ihrer Seiten

heißt die **simpliziale Umgebung von x bzw. τ** .

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x) \mid x \notin \sigma\}$$

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$$

heißt der **Link von x bzw. τ** .

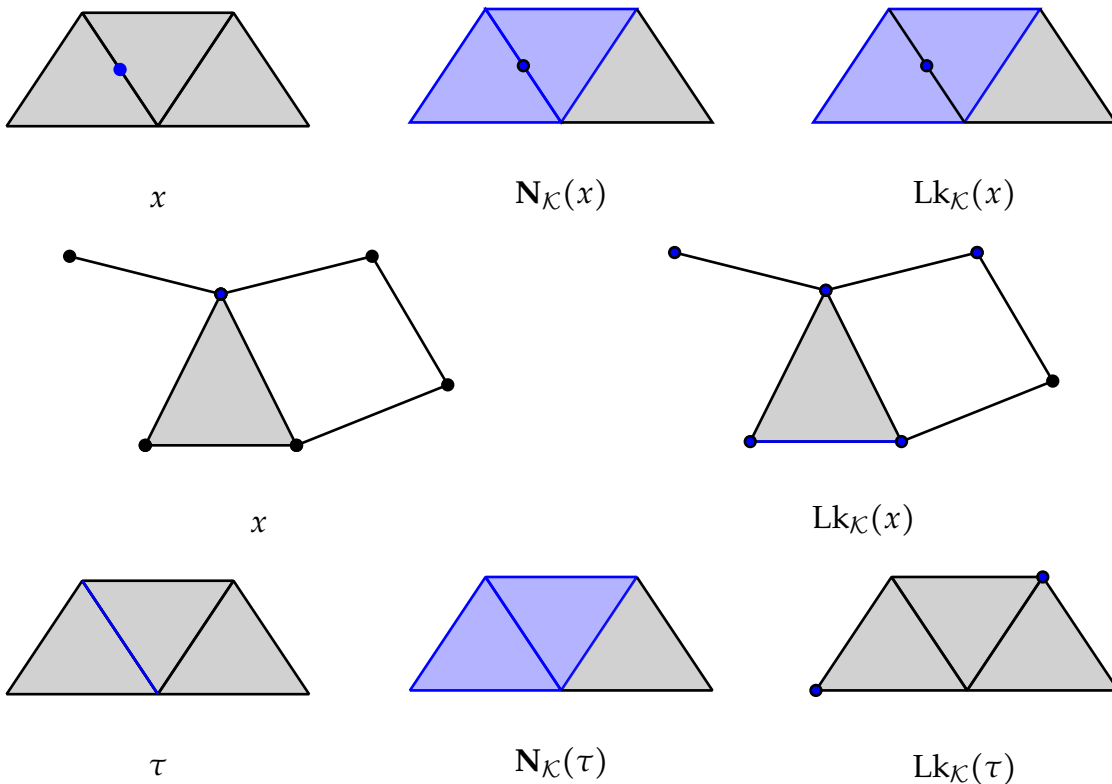
$$\text{St}_{\mathcal{K}}(x) := |\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x)| \setminus |\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x)| = \text{St}_{\mathcal{K}}(\tau),$$

wobei $x \in \text{relint } \tau$ heißt der **Stern von x bzw. τ** .

$\text{St}_{\mathcal{K}}$ hängt offensichtlich nicht von der Auswahl von $x \in \text{relint } \tau$ ab.

Achtung In der Literatur wird auch gelegentlich $\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau)$ als Stern von τ bezeichnet. Der Index \mathcal{K} wird weggelassen, wenn klar ist, auf welchen simplizialen Komplex sich die Bezeichnung bezieht.

Beispiele



sa-01

Proposition 4.1 (a) $|\mathbf{N}(x)|$ ist sternförmig bzgl. x , d.h. für alle $y \in |\mathbf{N}(x)|$ liegt die Strecke xy in $|\mathbf{N}(x)|$.

(b) Jeder von x ausgehende Strahl $l \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $l \cap |\mathbf{N}(x)| \neq \{x\}$ trifft $|\text{Lk}(x)|$ in genau einem Punkt.

Beweis. (a) Falls $y \in |\mathbf{N}(x)|$, dann gibt es $\tau \in \mathcal{K}$ mit $x \in \tau$. τ ist konvex, also liegt die Strecke xy in τ und somit in $|\mathbf{N}(x)|$

(b) Aufgabe 35 (3 P). ■

Definition Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} simpliziale Komplexe, $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ stetig. Dann heißt eine simpliziale Abbildung $g : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine **simpliziale Approximation von f** , falls für jede Ecke a von \mathcal{K} gilt: $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$.

Bemerkung Falls f simplizial ist, dann ist $g = f$ eine simpliziale Approximation von f , denn dann bildet f das Simplex, das a als Ecke hat auf ein Simplex in \mathcal{L} ab, das $f(a)$ als Ecke hat, also $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(f(a))$ für alle Ecken a in \mathcal{K} .

sa-02

Proposition 4.2 Seien \mathcal{K}, \mathcal{L} simpliziale Komplexe, $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ stetig. Falls g eine Abbildung von der Menge der Ecken in \mathcal{K} in die Menge der Ecken von \mathcal{L} ist, mit $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$, dann gibt es eine eindeutige bestimmte simpliziale Abbildung $\bar{g} : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$, die g fortsetzt und \bar{g} ist eine simpliziale Approximation von f .

Beweis. Zu zeigen: $\text{konv}\{g(a_0), \dots, g(a_n)\} \in \mathcal{L}$, falls $\text{konv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$. Dann lässt sich g eindeutig zu einer simplizialen Approximation \bar{g} auf \mathcal{K} fortsetzen und \bar{g} ist nach Definition eine simpliziale Approximation.

Sei $x \in \text{relint}\text{konv}\{a_0, \dots, a_n\}$. Dann ist

$$x \in \text{St}(a_0) \cap \dots \cap \text{St}(a_n)$$

$$\implies f(x) \in f(\text{St}(a_0)) \cap \dots \cap f(\text{St}(a_i)) \cap \dots \cap f(\text{St}(a_n)) \subseteq \text{St}(g(a_0)) \cap \dots \cap \text{St}(g(a_n)),$$

also gilt für $i = 0, \dots, n$ $g(a_i)$ ist eine Ecke des eindeutig bestimmten Simplexes $\sigma \in \mathcal{L}$ mit $f(x) \in \text{relint}\sigma$. Also ist $\text{konv}\{g(a_0), \dots, g(a_n)\}$ eine Seite von $\sigma \in \mathcal{L}$. ■

sa-03

Satz 4.3 Seien \mathcal{K}, \mathcal{L} simpliziale Komplexe, $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ stetig. Sei g eine simpliziale Approximation von f . Dann gilt $f \simeq g$. Es gilt sogar $f \simeq g \text{ rel } \{x \in |\mathcal{K}| \mid f(x) = g(x)\}$.

Beweis. Sei $x \in |\mathcal{K}|$, $x \in \text{relint}\sigma$, $\sigma = \text{konv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$. Dann ist $f(x)$ in einem Simplex $\tau \in \mathcal{L}$, das $g(a_0), \dots, g(a_n)$ als Ecken (und möglicherweise weitere) hat (vgl. Beweis von 4.2), also $g(x) \in \tau$, also liegt die Verbindungsstrecke von $f(x)$ und $g(x)$ ganz in $\tau \subseteq |\mathcal{L}|$, also $f \simeq g$ (nach Lemma 2.3 mit $F(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x)$), also $f \simeq g \text{ rel } \{x \in |\mathcal{K}| \mid f(x) = g(x)\}$. ■

Also approximiert die simpliziale Approximation «bis auf Homotopie».

Beispiel (1) $\text{St}(a_1) = (a_0, a_2)$ offenes Intervall.

$$f(\text{St}(a_0)) \subseteq \text{St}(b_0) \cap \text{St}(b_2)$$

$$f(\text{St}(a_1)) \subseteq \text{St}(b_2)$$

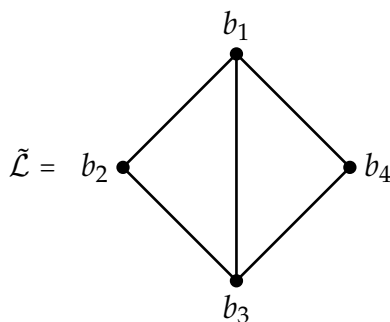
$$f(\text{St}(a_2)) \subseteq \text{St}(b_1)$$

$$f(\text{St}(a_3)) \subseteq \text{St}(b_1) \cap \text{St}(b_3)$$

Also simpliziale Approximation g , wenn $g(a_0) \in \{b_0, b_2\}$, $g(a_1) = b_2$, $g(a_2) = b_1$, $g(a_3) \in \{b_1, b_3\}$. Dies Beispiel zeigt, dass es verschiedene simpliziale Approximationen gibt.

(2) Sei $\tilde{\mathcal{K}} = \bullet \text{---} \bullet$, also $|\mathcal{K}| = |\tilde{\mathcal{K}}|$, f, \mathcal{L} wie vorher. Dann ist $f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0))$ in keinem Eckstern von \mathcal{L} enthalten, d.h. es gibt **keine** simpliziale Approximation (bzgl. \mathcal{K} , \mathcal{L}).

(3) Seien $\tilde{\mathcal{K}}, f$ wie in 2),



Dann ist $f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0)) \subseteq \text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(b_1) \cap \text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(b_3)$, also gibt es wieder eine simpliziale Approximation bzgl. $\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{L}}$.

(2) und (3) zeigen, dass die Existenz einer simplizialen Abbildung von $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ (bzgl. \mathcal{K}, \mathcal{L}) stark von \mathcal{K}, \mathcal{L} selbst abhängt (und nicht von $|\mathcal{K}|, |\mathcal{L}|$). Dabei vergrößert eine «feinere Unterteilung» von \mathcal{K} die Möglichkeiten einer simplizialen Approximation. Eine feinere Unterteilung von \mathcal{L} reduziert die Möglichkeiten.

Idee Lasse \mathcal{L} fest und «verfeinere» die Unterteilung von \mathcal{K} in Simplexes solange bis (hoffentlich) eine simpliziale Approximation von f existiert.

Zu präzisieren, was «verfeinern» heißt:

Definition Der **Schwerpunkt** eines Simplexes $\sigma = \text{konv}\{a_0, \dots, a_n\}$ (a_0, \dots, a_n affin unabhängig) ist

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i \quad (\text{für } \sigma \neq \emptyset)$$

Offenbar ist $\hat{\sigma} \in \text{relint } \sigma$.

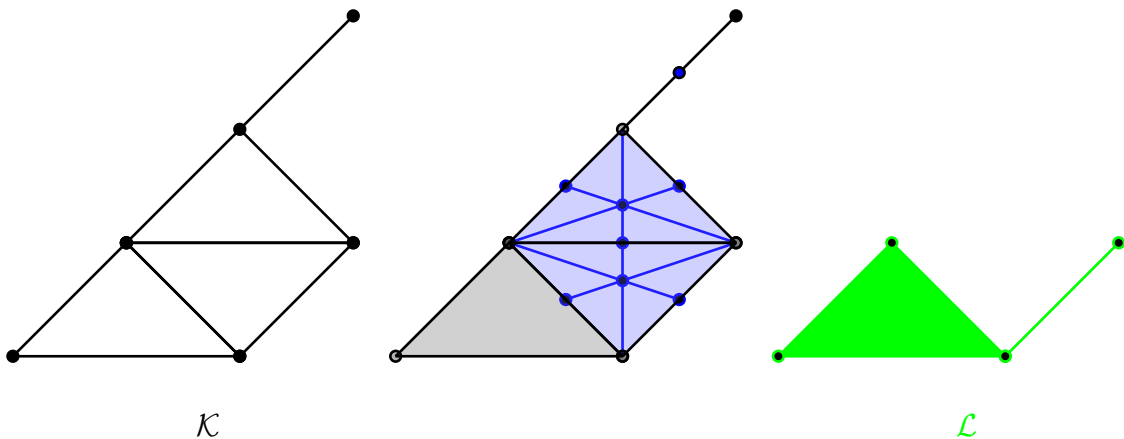
Wir wollen uns die Möglichkeit vorbehalten einen Teil von \mathcal{K} unverändert zu lassen und gehen deshalb von einem simplizialen Paar $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ aus (also $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$).

Definition Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ein simpliziales Paar. Dann ist die **baryzentrische Unterteilung von \mathcal{K} relativ zu \mathcal{L}** oder der **abgeleitete Komplex $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$** folgendermaßen definiert:

$$(\mathcal{K}, \mathcal{L})' := \left\{ \text{konv}\{a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m\} \mid \text{konv}\{a_0, \dots, a_k\} \in \mathcal{L}, k, m \geq -1, \sigma_0, \dots, \sigma_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \right. \\ \left. \sigma_m \not\supseteq \sigma_{m-1} \not\supseteq \dots \not\supseteq \sigma_0 \not\supseteq \text{konv}\{a_0, \dots, a_k\} \right\}$$

Bezeichnung Falls $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$, schreibe \mathcal{K}' für $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$

Beispiel



sa-04

Proposition 4.4 $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ ist ein simplizialer Komplex, der \mathcal{L} als Unterkomplex enthält und $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}|$.

Beweis. Die Ecken von $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ sind alle Ecken von \mathcal{L} und alle Ecken der Form $\hat{\sigma}$ mit $\sigma \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$. Nach Definition ist klar, dass Seiten von Simplexes in $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ wieder in $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ sind. $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| \subseteq |\mathcal{K}|$ klar. ■

Dass $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}|$ und dass der Durchschnitt von Simplexes aus $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$ eine gemeinsame Seite ist, wird induktiv nach der Dimension n \mathcal{K} bewiesen: Betrachte das r -Skelett von \mathcal{K} ($K^r := \text{Sk}_r(\mathcal{K})$), betrachte weiter $K^r \cup \mathcal{L}$. Sei $n = \dim \mathcal{K}$, $r \leq n$. Wir beweisen

sa-05

Lemma 4.5 (a) $(K^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ ist ein simplizialer Komplex, der \mathcal{L} als Unterkomplex enthält.

(b) $|(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}|$

(c) Jedes Simplex von $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ ist in einem Simplex von $\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}$ enthalten.

(d) Falls \mathcal{N} ein Unterkomplex von \mathcal{K}^r ist, dann gilt $(\mathcal{N}, \mathcal{N} \cap \mathcal{L})'$ ist ein Unterkomplex von $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$.

Beweis. (c) Klar, denn $\text{konv}\{a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m\} \subseteq \sigma_m$.

(d) Klar.

(a) Vollständige Induktion nach r : Für $r = -1$ Klar, $\mathcal{K}^{-1} = \{\emptyset\}$, $(\mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{L}$ für $r = 0$ klar. $(\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}$. \mathcal{L} Unterkomplex von $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ ist klar.

Für den Schnitt von Simplexes gibt es drei Fälle:

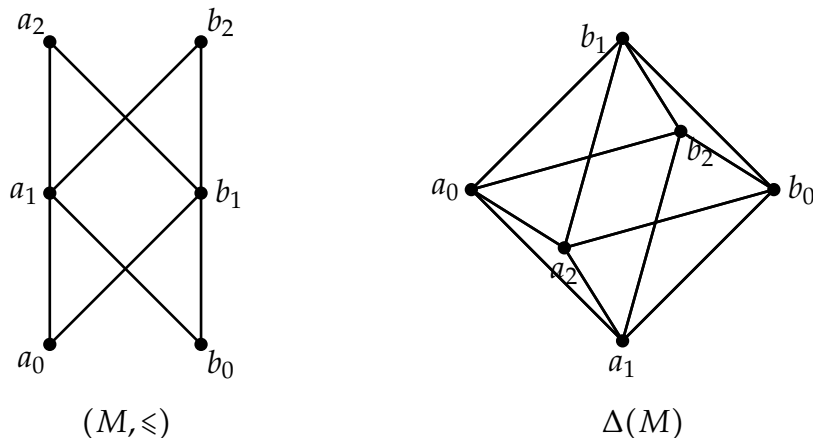
- (i) $\xi \in (\mathcal{K}^{r-1} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$, η von der Form $\text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau) = \eta \subseteq \sigma$, $\tau \in (\mathcal{K}^{r-1} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})$, $\sigma \in \mathcal{K}^r \setminus \mathcal{K}^{r-1}$. Dann ist $\xi \cap \eta = \xi \cap \tau$ (denn $\xi \cap \sigma \subseteq \tau$ wegen $\sigma \notin \mathcal{K}^{r-1}$) und $\xi \cap \tau$ ist nach Induktionsannahme eine gemeinsame Seite.
- (ii) Falls ξ, η von der Form $\xi = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$, $\eta = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \mu)$, dann ist $\xi \cap \eta = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup (\tau \cap \mu))$, also eine gemeinsame Seite.
- (iii) Falls ξ, η von der Form $\xi = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$, $\eta = \text{konv}(\{\hat{\nu}\} \cup \mu)$ mit $\hat{\sigma} \neq \hat{\nu}$, dann ist $\xi \cap \eta = \tau \cap \mu$ eine gemeinsame Seite.

(b) Einfache Aufgabe. ■

Die Konstruktion kann für abstrakte simpliziale Komplexe durchgeführt werden. Dies kann für endliche partiell geordnete Mengen (M, \leq) verallgemeinert werden.

Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge. Dann bezeichne $\Delta(M)$ den abstrakten simplizialen Komplex mit Eckenmenge M und allen Ketten in (M, \leq) (d.h. linear geordnete Teilmengen von (M, \leq)) als Simplexe. Es ist klar, dass dies ein abstrakter simplizialer Komplex ist, da eine Teilmenge einer Kette einer Kette ist. Die k -Simplexe sind also Ketten der Länge $k + 1$, $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ in (M, \leq) .

Beispiel Ecken $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$



Definition Der r -fach abgeleitete Komplex $(\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)}$ von \mathcal{K} relativ zu \mathcal{L} (f -fache baryzentrische Unterteilung) ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)} &:= \mathcal{K} \\
 (\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)} &:= ((\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r-1)}, \mathcal{L})'
 \end{aligned}$$

Definition Die Sternüberdeckung eines simplizialen Komplexes ist die Menge der Eckensterne von \mathcal{K} .

Die Maschenweite (mesh) einer offenen Überdeckung eines metrischen Raumes ist das Supremum der Durchmesser der Überdeckungsmengen und $\text{mesh}(\mathcal{K})$, für \mathcal{K} simplizialer Komplex, ist die Maschenweite der Sternüberdeckung von \mathcal{K} .

sa-06 **Proposition 4.6** Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{mesh}(\mathcal{K}^{(r)}) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei λ das Maximum der Längen der 1-Simplexe von \mathcal{K} . Es ist klar, dass der Durchmesser von $\text{Stn}(a) \leq 2\lambda$ für jede Ecke a in \mathcal{K} (jede Ecke von $\text{N}(a)$ ist in der abgeschlossenen Kugel um a mit Radius λ enthalten).

Sei $n := \dim \mathcal{K}$. Sei $\lambda^{(r)}$ der maximale Kantenlänge in $\mathcal{K}^{(r)}$. Dann gilt $\lambda^{(1)} \leq \frac{n}{n+1}\lambda$, denn

$$d\left(a_0, \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_i\right) = \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (a_i - a_0) \right\| \leq \frac{m}{m+1} \max_{i=1, \dots, m} d(a_i, a_0).$$

Also

$$\text{mesh} \mathcal{K}^{(r)} \leq 2\lambda^{(r)} \leq 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \lambda,$$

und wegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^r = 0$$

folgt die Behauptung. ■

sa-07 **Lemma 4.7 (Analysis)** Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ gibt es $\delta > 0$ (die **Lebesgue-Zahl** von $\{U_i \mid i \in I\}$), so dass jede Teilmenge von X vom Durchmesser $< \delta$ in einer der U_i enthalten ist.

Beweis. Da X kompakt ist, ist I o.E. endlich, sagen wir $I = \{1, \dots, n\}$. Für $x \in X$, $i \in I$ definiere

$$f_i(x) := d(x, X \setminus U_i),$$

$$f(x) := \max_{i \in I} f_i(x)$$

$f_i(x), f(x)$ sind stetig. $f(X) \subseteq \mathbb{R}_+$ ist kompakt und $0 \notin f(X)$, da die U_i eine offene Überdeckung bilden und $d(x, X \setminus U_i) = 0 \iff x \in X \setminus U_i$ (wegen $X \setminus U_i$ kompakt). Also gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > \delta$ für alle $x \in X$. ■

sa-08 **Satz 4.8** Seien \mathcal{K}, \mathcal{L} simpliziale Komplexe und $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ stetig. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, sodass $f : |\mathcal{K}^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ eine simpliziale Approximation ist.

Beweis. Betrachte $\{f^{-1}(\text{St}(b)) \mid b \text{ ist eine Ecke von } \mathcal{L}\}$. Dies ist eine offene Überdeckung von $|\mathcal{K}|$. Nach Lemma 4.7 hat diese eine Lebesgue-Zahl δ . Wähle r mit

$$\text{mesh} \mathcal{K}^{(r)} < \delta.$$

Dann gibt es für jede Ecke a in \mathcal{K} eine Ecke b in \mathcal{L} mit

$$\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}}(a) \subseteq f^{-1}(\text{St}_{\mathcal{L}}(b)) \implies f(\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}}(a)) \subseteq \text{St}(b).$$

Also hat f nach Proposition 4.2 eine simpliziale Approximation. ■

Folgerung Es gibt höchstens abzählbar viele Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$.

Beweis. Es gibt nur endlich viele simpliziale Abbildungen von $\mathcal{K}^{(r)}$ nach \mathcal{L} . Nach Satz 4.8 und 4.3 gibt es für jede stetige Abbildung $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ein $r \in \mathbb{N}$, sodass f homotop zu einer simplizialen Abbildung von $\mathcal{K}^{(r)}$ nach \mathcal{L} ist. ■

Satz 4.8 wird noch verfeinert:

sa-09

Satz 4.9 Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ ein simpliziales Paar, \mathcal{L} ein simplizialer Komplex, $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ stetig. Falls $f|_{|\mathcal{M}|}$ simplizial ist, dann gibt es $r \in \mathbb{N}$ und eine simpliziale Abbildung $h : |(\mathcal{K}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$, so dass $h|_{|\mathcal{M}|} = f|_{|\mathcal{M}|}$ und $h \simeq f \text{ rel } |\mathcal{M}|$ ist.

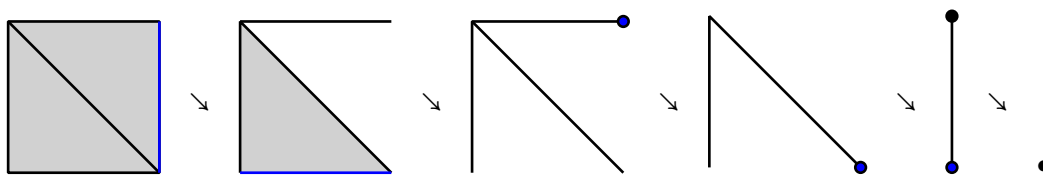
Beweis. Siehe z. B. in Maunder: Algebraic Topology Theorem 2.5.10. Beweisidee ähnlich wie in Satz 4.8. ■

Definition Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex. Ein n -Simplex σ von \mathcal{K} hat eine freie Seite τ , falls τ eine $(n - 1)$ -Seite von σ ist, die nicht Seite eines anderen n -Simplexes in \mathcal{K} ist.

Falls σ eine freie Seite hat, dann ist σ in keinem Simplex von \mathcal{K} als eigentliche Seite enthalten, also ist $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$ ein Unterkomplex von \mathcal{K} . Der Übergang von \mathcal{K} zu $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$ heißt ein **elementarer Kollaps** und wir definieren \mathcal{K} **kollabiert zu** \mathcal{L} (geschrieben $\mathcal{K} \searrow \mathcal{L}$), falls $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ ein Unterkomplex ist, der aus \mathcal{K} durch eine Folge elementarer Kollapse erfolgt.

\mathcal{K} heißt **kollabierbar**, falls \mathcal{K} auf einen einpunktigen simplizialen Komplex kollabiert, $\{\{x\}, \emptyset\}$.

Beispiel



Definition Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex. Ein **Kantenweg** in \mathcal{K} von der Ecke a_0 zur Ecke a_n ist eine Folge von Ecken a_0, a_1, \dots, a_n , sodass für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\text{konv}\{a_{k-1}, a_k\} \in \mathcal{K}$ ($a_{k-1} = a_k$ zugelassen). Falls $a_0 = a_n$ dann heißt er auch eine **Kantenschleife** mit Basispunkt a_0 .

Falls $\alpha = a_0, \dots, a_n$, $\beta = a_n, \dots, a_{n+m}$ Kantenwege sind, dann ist $\alpha\beta := a_0 \dots a_n \dots a_{n+m}$ das **Produkt** und $\alpha^{-1} := a_n \dots a_0$ das **inverse Kantenweg**. Offensichtlich gilt $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ und $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

Zwei Kantenwege α, β heißen **äquivalent**, geschrieben, $\alpha \sim \beta$, wenn sie durch eine (endliche) Folge von Operationen der folgenden Form ineinander überführt werden können:

(a) ersetze $\alpha_1 a \alpha_2$ durch $\alpha_1 aa \alpha_2$

(a') ersetze $\alpha_1 aa \alpha_2$ durch $\alpha_1 a \alpha_2$

und falls $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$ (a, b, c nicht notwendig verschieden)

(b) ersetze $\alpha_1 abc \alpha_2$ durch $\alpha_1 ac \alpha_2$

(b') ersetze $\alpha_1 ac \alpha_2$ durch $\alpha_1 abc \alpha_2$

wobei α_1, α_2 Kantenwege (« \square » zugelassen), a, b, c Ecken von \mathcal{K} sind und \sim (nach Konstruktion) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kantenwege in \mathcal{K} ist.

Ferner gilt offensichtlich

sa-10 **Proposition 4.10** Seien α_1, β_1 Kantenwege von a_0 nach a_n und α_2, β_2 von a_n nach a_{n+m} mit $\alpha_1 \sim \beta_1$ und $\alpha_2 \sim \beta_2$. Dann gilt:

(i) $\alpha_1 \alpha_2 \sim \beta_1 \beta_2$

(ii) $\alpha_1^{-1} \sim \beta_1^{-1}$

(iii) $a_0 \alpha_1 \sim \alpha_1 \sim \alpha_1 a_n$

(iv) $\alpha_1 \alpha_1^{-1} \sim a_0$ und $\alpha_1^{-1} \alpha_1 \sim a_n$

Beweis. Klar. ■

sa-11 **Folgerung 4.11 (und Definition)** Die Menge der Äquivalenzklassen (bzgl. \sim) von Kanten-schleifen in \mathcal{K} mit Basispunkt a_0 mit der Operation $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$ bildet eine Gruppe mit $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ und neutralem Element $[a_0]$, die **Kantengruppe**. sie wird mit $\tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ bezeichnet.

Beweis. Klar, vgl. Definition der Fundamentalgruppe. ■

sa-12 **Satz 4.12** Es gilt

$$\tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0).$$

Beweis. Definiere $\varphi : \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ durch

$$\varphi([a_0 \dots a_n]) := [\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n}],$$

wobei

$$a_n = a_0,$$

$$\overline{a_{k-1} a_k}(t) := (1-t)a_{k-1} + ta_k,$$

$$\varphi([a_0]) := [\overline{a_0 a_0}].$$

$\overline{a_{k-1} a_k} : I \rightarrow |\mathcal{K}|$ ist ein Weg von a_{k-1} nach a_k , also

$$\overline{a_0 a_1} (\overline{a_1 a_2} (\dots (\overline{a_{n-1} a_n}) \dots))$$

ein Weg von a_0 nach $a_n = a_0$.

φ ist wohldefiniert: Die Operation (a) bzw. (a') bedeutet, dass Einfügen bzw. Entfernen eines konstanten Weges. Die Wege $\overline{ab} \overline{bc}$ und \overline{ac} sind offenbar homotop in $|\mathcal{K}|$ (vgl. Lemma 2.3), falls $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$. Also $\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n} \simeq \overline{a_0 a_1} \dots \overline{ac} \dots \overline{a_{n-1} a_n}$ falls $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$.

φ ist ein Gruppenhomomorphismus: Klar nach Definition.

φ ist surjektiv: Sei $[w] \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$. Sei \mathcal{I} der zu $I = [0, 1]$ gehörige simpliziale Komplex, $\mathcal{I} = \{[0, 1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$. Nach Satz 4.7 gibt es $r \in \mathbb{N}$ und $\tilde{w} : \mathcal{I}^{(r)} \rightarrow |\mathcal{K}|$ simplizial mit $\tilde{w} \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$, d.h. $[\tilde{w}] = [w]$. Sei $u := 2^r$, $a_k := \tilde{w}(\frac{k}{u})$. Dann ist

$$\varphi([a_0 \dots a_n]) = [\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n}] = [\tilde{w}] = [w]$$

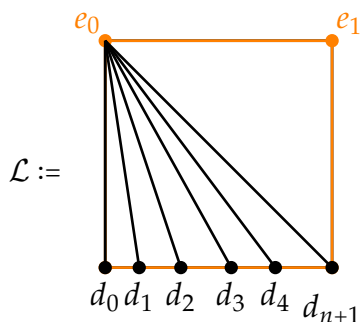
also φ surjektiv.

φ ist injektiv. Zu zeigen: $\varphi[\alpha] = e \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \implies \alpha \sim a_0$

Sei $\alpha = [a_0 \dots a_n a_0]$, $u := \overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n a_n a_0}$. u ist eine simpliziale Abbildung von einer Triangulierung von I mit Ecken $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{n+1} = 1$ und $u(c_k) = a_k$ ($0 \leq k \leq n$), $u(c_{n+1}) = a_0$. Falls $\varphi(\alpha) = e \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$, dann gibt es eine Homotopie $F : I \times I \rightarrow |\mathcal{K}|$ mit $F(t, 0) = u(t)$, $F(t, 1) = F(0, t) = F(1, t) = a_0$ für alle $t \in I$.



Betrachte den simplizialen Komplex



$$\begin{aligned} d_i &= (e_i, 0), \\ e_0 &= (0, 1), \\ e_1 &= (1, 1) \end{aligned}$$

und \mathcal{M} mit $|\mathcal{M}|$ ist der Rand von $I \times I$ (in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). $F|_{|\mathcal{M}|}$ ist simplizial, also gibt es nach Satz 4.9 eine simpliziale Abbildung

$$\tilde{F} : |(\mathcal{L}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{K}|,$$

sodass $\tilde{F}|_{|\mathcal{M}|} = F|_{|\mathcal{M}|}$ und $\tilde{F} \simeq F \text{ rel } |\mathcal{M}|$. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 \dots a_n a_0 \\ &= F(d_0) \dots F(d_{n+1}) \\ &= \tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1}) \stackrel{(*)}{\sim} \tilde{F}(d_0) \tilde{F}(e_0) \tilde{F}(e_1) \tilde{F}(d_{n+1}) = a_0 a_0 a_0 a_0 a_0 \sim a_0. \end{aligned}$$

Zu (*): Starte mit $\tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1})$. Hänge nacheinander Dreiecke von $\mathcal{L}^{(r)}$ ein. Dies entspricht einem Elementarschritt vom Typ (b') bzw. (b) in der Definition von \sim für das Bildsimplex unter \tilde{F} . ■

Definition Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex. Ein eindimensionaler Unterkomplex $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ heißt ein **Baum**, falls \mathcal{L} kontrahierbar ist und ein **aufspannender Baum**, falls \mathcal{L} ein Baum ist, der alle Ecken von \mathcal{K} enthält.

Bemerkung \mathcal{L} ist ein Baum genau dann, wenn \mathcal{L} zusammenhängend ist und keine Zyklen enthält.

sa-13

Proposition 4.13 Falls $|\mathcal{K}|$ zusammenhängend ist, dann enthält \mathcal{K} einen aufgespannten Baum.

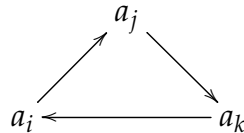
Beweis. Aufgabe 36 (1 P). ■

Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ ein Unterkomplex. Sei $|\mathcal{K}|$ wegzusammenhängend, $|\mathcal{L}|$ kontrahierbar und enthalte \mathcal{L} alle Ecken von \mathcal{K} (z. B. \mathcal{L} aufspannender Baum in \mathcal{K} hat die gewünschten Eigenschaften). Ordne die Ecken von \mathcal{K} , a_0, a_1, \dots, a_n . Sei

$$M := \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}\},$$

mit g_{ij} verschiedene Symbole. Definiere in $F(M)$ (freie Gruppe):

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= \begin{cases} \varepsilon & , \text{ falls } \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L} \\ g_{ij}^{-1} & , \text{ falls } \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \end{cases} \\ R &:= \{g_{ij} g_{jk} g_{ik}^{-1} \mid i < j < k, \text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \setminus \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}\} \\ G &:= F(M) / \langle R \rangle \end{aligned}$$

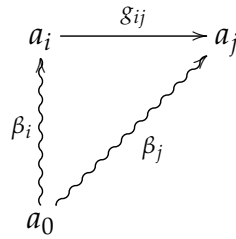


sa-14

Satz 4.14 $G \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$.

Beweis. Nach Satz 4.12 ist $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ (Kantengruppe). Wir konstruieren Homomorphismen $\Theta : G \rightarrow \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$, $\Phi : \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow G$ und zeigen, dass $\Theta \circ \Phi = \text{id}$, $\Phi \circ \Theta = \text{id}$.

Definition von Θ :



Wähle für jede Ecke a_r einen (festen) Kantенweg β_r in \mathcal{L} von a_0 nach a_r (möglich da \mathcal{L} wegzusammenhängend ist und alle Ecken in \mathcal{K} enthält). Definiere $\tilde{\Theta} : M \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ durch

$$\tilde{\Theta}(g_{ij}) := [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}],$$

$\bar{\Theta} : F(M) \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ sei der eindeutig bestimmte Homomorphismus, der $\tilde{\Theta}$ fortsetzt (universelle Eigenschaft von $F(M)$), d.h. $\bar{\Theta}\varphi = \tilde{\Theta}^3$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & F(M) \\ \downarrow \bar{\Theta} & \swarrow \exists! \bar{\Theta} & \downarrow \text{nat} \\ \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) & \xleftarrow{\exists! \bar{\Theta}} & G = F(M) / \langle F \rangle \\ & \text{falls } R \subseteq \ker \bar{\Theta} & \end{array}$$

Zu zeigen: $R \subseteq \ker \bar{\Theta}$: Sei $i < j < k$, dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(g_{ij} g_{jk} g_{ik}^{-1}) &\stackrel{*}{=} [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}] [\beta_j a_j a_k \beta_k^{-1}] [\beta_k a_k a_i \beta_i^{-1}] \\ &\stackrel{**}{=} [\beta_i a_i a_j a_k \beta_i^{-1}] = [a_0], \end{aligned}$$

$**$, falls $\text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathcal{K}$ und $*$ falls $g_{ij} \in M$, dann ist $\bar{\Theta}(g_{ij}) = \tilde{\Theta}(g_{ij})$.

Falls $\text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L}$, also $g_{ij} = \varepsilon$, dann ist auch

$$\bar{\Theta}(g_{ij}) = \bar{\Theta}(\varepsilon) = [a_0] = [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}],$$

denn in \mathcal{L} sind nach Satz 4.12 alle Kantенwege äquivalent zu $[a_0]$ (da \mathcal{L} kontrahierbar). Also $\ker \text{nat} = \langle R \rangle \subseteq \ker \bar{\Theta}$, also existiert eindeutig ein Homomorphismus $\Theta : G \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ mit $\Theta \circ \text{nat} = \bar{\Theta}$.

Definition von $\Phi : \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow G$:

$$\begin{aligned} \Phi([a_0 a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_0]) &:= g_{0i_1} g_{i_1 i_2} \dots g_{i_k 0} \\ g_{ij} &:= \varepsilon \end{aligned}$$

Nun weiter nach Anleitung in Aufgabe 37^[✓]. ■

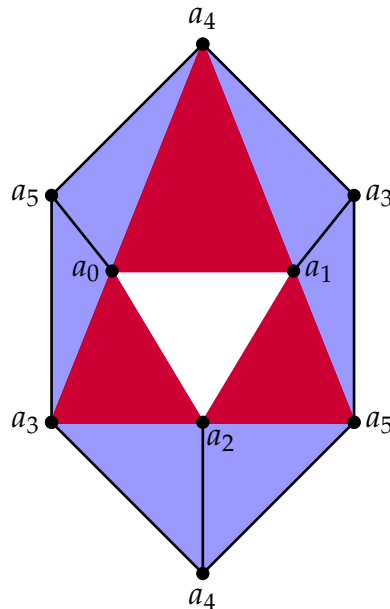
Aufgabe 37 (4 P). Zeige

- (a) Φ ist wohldefiniert.
- (b) Φ ist ein Gruppenhomomorphismus (trivial).
- (c) $\Phi\Theta = \text{id}$.

³Die natürliche Einbettung von M in die freie Gruppe.

(d) $\Theta\Phi = \text{id}$.

Beispiel $\mathbb{R}P^2$



\mathcal{K} mit $|\mathcal{K}| \cong \mathbb{R}P^2$ reelle projektive Ebene und \mathcal{L}^4

$M = \{g_{03}, g_{14}, g_{25}, g_{34}, g_{35}, g_{45}\}$ zu Kanten in $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}^5$

$R = \{g_{03}g_{34}g_{04}^{-1}, g_{03}g_{35}g_{05}^{-1}, g_{13}g_{34}g_{14}^{-1}, g_{14}g_{45}g_{15}^{-1}, g_{24}g_{45}g_{25}^{-1}, g_{23}g_{35}g_{25}^{-1}\}$ Dreiecke in $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}^6$
 $= \{g_{03}g_{34}, g_{03}g_{35}, g_{34}g_{14}^{-1}, g_{14}g_{45}, g_{35}g_{25}^{-1}, g_{45}g_{25}^{-1}\}$

$- = e$

Verkleinerung des Erzeugendensystems:

$$\begin{aligned} g_{34} &:= g_{03}^{-1} & g_{45} &:= g_{14}^{-1} = g_{03} \\ g_{35} &:= g_{03}^{-1} & g_{25} &:= g_{35}^{-1} = g_{03} \\ g_{14} &:= g_{34} = g_{03}^{-1} \end{aligned}$$

also bleibt ein erzeugendes Element g_{03} übrig und die Relation

$$g_{45}g_{25}^{-1} = g_{03}g_{03} = g_{03}^{-1},$$

also

$$G \cong F(g_{03}) / \langle g_{03}^2 \rangle \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2,$$

also $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Für das Coprodukt von Gruppen schreiben wir auch $G * H$ statt $G \amalg H$ und fassen G, H als Untergruppen von $G * H$ auf:

⁴Also die dunkelrote Fläche.

⁶Also die schwarzen «Verbindungsstrecken» der Knoten.

⁶Also die hellblau gefärbten Flächen.

sa-15

Satz 4.15 (Seifert, von Kampen) Seien $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ wegzusammenhängende simpliziale Komplexe mit $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$, $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Sei a_0 eine Ecke von \mathcal{N} . Seien $\lambda : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{L}|$, $\mu : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{M}|$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt

$$\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) / \left\langle \{(\lambda_{\#}c)(\mu_{\#}c)^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\} \right\rangle$$

Beweis. Sei $T_{\mathcal{N}}$ ein aufgespannender Baum in \mathcal{N} , $T_{\mathcal{L}} \supseteq T_{\mathcal{N}}$ ein aufspannender Baum in \mathcal{L} (Existenz klar), $T_{\mathcal{M}} \supseteq T_{\mathcal{N}}$ ein aufspannender Baum in \mathcal{M} . Dann ist $T_{\mathcal{K}} := T_{\mathcal{M}} \cup T_{\mathcal{L}}$ ein aufgespannender Baum in $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ (wegen $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ können keine Zyklen entstehen) und $T_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{M} = T_{\mathcal{L}}$, $T_{\mathcal{L}} \cap T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{N}}$. Ordne die Ecken von \mathcal{K} , dies induziert eine Ordnung der Ecken von $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$. Nach Satz 4.14 ist

$$\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle$$

mit

$$M_{\mathcal{K}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

$$R_{\mathcal{K}} = \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} \mid i < j < k, \text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

(mit der Konvention $g_{ij} := \varepsilon$ falls $\text{konv}\{a_i, a_j\} \in T_{\mathcal{K}}$). $\mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}} = (\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cup (\mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cap (\mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}}) = \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}$ und

$$\begin{aligned} F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle &\cong F(M_{\mathcal{L}} \cup M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \cup R_{\mathcal{M}} \cup D \rangle \\ &\stackrel{*}{\cong} \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) / \langle \tilde{D} \rangle, \end{aligned}$$

wobei

$$M_{\mathcal{L}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}\}$$

$$M_{\mathcal{M}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}}\}$$

mit $M_{\mathcal{L}} \cap M_{\mathcal{M}} = \emptyset$.

$$D := \{g_{ij}h_{ij}^{-1} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}\}$$

* gilt wegen

$$\pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{L}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \rangle$$

$$\pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{M}} \rangle$$

wobei

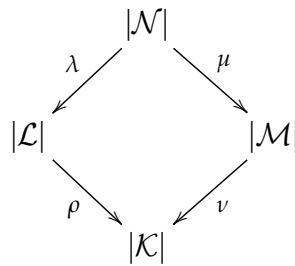
$$\tilde{D} = \{(\lambda_{\#}\Theta(g_{ij}))(\mu_{\#}\Theta(g_{ij}))^{-1} \mid g_{ij} \in M_{\mathcal{N}}\}$$

$$M_{\mathcal{N}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}\}$$

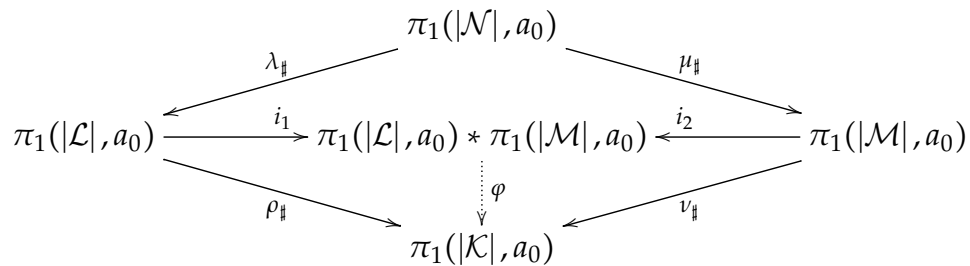
und $\Theta : M_{\mathcal{N}} \rightarrow \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$ wie in Satz 4.14. Ferner gilt

$$\langle \tilde{D} \rangle = \langle \{\lambda_{\#}(c)\mu_{\#}(c)^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\} \rangle.$$

■



Dieses Diagramm induziert ein entsprechendes Diagramm von Gruppenhomomorphismen:



wobei φ der von $\rho_{\#}, \nu_{\#}$ induzierte Gruppenhomomorphismus aus dem Coprodukt ist, i_1, i_2 die natürlichen Einbettungen in das Coprodukt (in der Formulierung des Satzes werden $\pi_1(|\mathcal{L}|, a_0), \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$ als Untergruppen des Coproduktes aufgefasst).

Der Satz sagt, dass φ surjektiv ist und dass

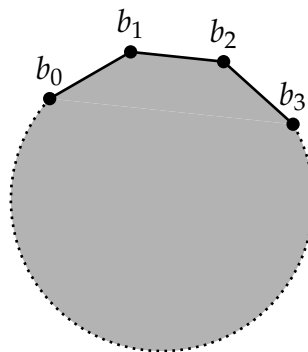
$$\ker \varphi = \left\{ \left\{ (i_1 \lambda_{\#}(c)) (i_2 \mu_{\#}(c))^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \right\} \right\}$$

Bemerkung Es reicht in Satz 4.15 ein Erzeugendensystem $E \subseteq \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$ zu wählen. Spezialfall von Satz 4.15:

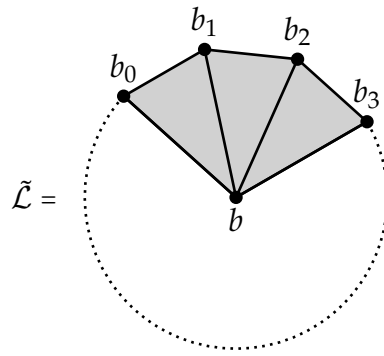
Falls $|\mathcal{N}|$ einfach zusammenhängend ist, dann ist $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$.

Wir wollen nun Satz 4.15 auf die Situation anwenden, dass eine Kreisscheibe entlang des Randes in einen topologischen Raum eingeklebt wird.

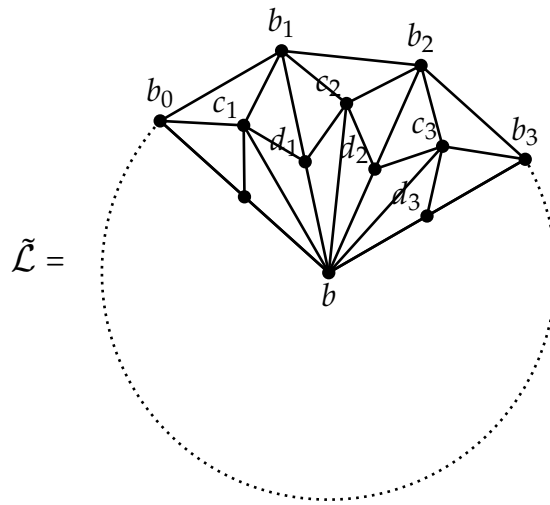
Sei \mathcal{K} ein simplizialer Komplex. $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n a_0$ ($n \geq 2$) eine Kantenschleife in \mathcal{K} , sodass $a_i \neq a_{i+1}, a_n \neq a_0$. α induziert eine simpliziale Abbildung der triangulierten Kreislinie



in \mathcal{K} , $b_i \mapsto a_i$. Dies ist der Rand eines $(n+1)$ -Eckes. Sei



\mathcal{M} sei der «Rand» \mathcal{L} (Polygon). Sei $\mathcal{L} = (\tilde{\mathcal{L}}, M)'$, also



Sei \mathcal{N} der Komplex, der aus $\mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ durch Identifikation von b_i mit a_i entsteht. Damit werden die Kanten $b_i b_{i+1}$ mit $a_i a_{i+1}$ identifiziert (und $b_n b_0$ mit $a_n a_0$). Wie man sich leicht überlegt, entstehen keine weiteren Identifikationen von Simplizes (beachte $a_i \neq a_{i+1}$) und damit

$$|\mathcal{N}| \cong |\mathcal{K}| \cup_f |\mathcal{L}|,$$

f die simpliziale Abbildung von $|\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{K}|$.

sa-16 **Satz 4.16** $\pi_1(|\mathcal{K}| \cup_f |\mathcal{L}|) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta([a]) \rangle$.

Beweis. Wähle in \mathcal{L} ein Simplex $\sigma = \text{konv}\{b_0, d_0, c_1\}$, $Y := |\mathcal{N} \setminus \{\sigma\}|$. Nach Satz 4.15 erhält man für \mathcal{N} :

$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(Y, y_0) * \pi_1(\sigma, a_0) / \langle D \rangle,$$

und

$$D = \left\{ \lambda_{\#}(d) (\mu_{\#}d)^{-1} \mid d \in \pi_1(|\partial\sigma|, a_0) \right\},$$

wobei $\lambda : |\partial\sigma| \rightarrow |\mathcal{N} \setminus \sigma|$, $\mu : |\partial\sigma| \rightarrow \sigma$ die Einbettungen sind, $\partial\sigma$ der Randkomplex von σ .

$\pi_1(\sigma_0, a_0) = \{0\}$ die triviale Gruppe, also $\mu_{\#}d = e$ für alle $d \in \pi_1(|\partial\sigma|)$. $\pi_1(|\partial\sigma|, a_0) \cong \mathbb{Z}$ mit $\Theta([\beta])$, $\beta = b_0d_0c_1b_0$ als erzeugendem Element ($a_0 = b_0$ nach Identifikation), also

$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(Y, a_0) / \langle \Theta([\beta]) \rangle.$$

Nun ist $|\mathcal{L}|$ konvex und damit ist die Zentralprojektion vom Schwerpunkt von σ auf $|\mathcal{M}|$ eine (starke) Deformationsretraktion von $|\mathcal{L} \setminus \{0\}|$ auf $|\mathcal{M}|$ und diese kann zu einer Deformationsretraktion $\rho : Y \rightarrow |\mathcal{K}|$ fortgesetzt werden. Damit ist $\rho_{\#} : \pi_1(Y, a_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ ein Isomorphismus und die Komposition $\rho_{\#}\Theta[\beta] = \Theta[\alpha]$, also

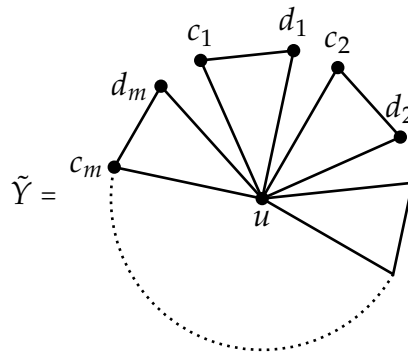
$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta[\alpha] \rangle.$$

■

sa-17

Satz 4.17 Zu jeder endlich präsentierten Gruppe $G \cong F(M)/\langle A \rangle$ gibt es einen zweidimensionalen wegzusammenhängenden simplizialen Komplex \mathcal{K} mit $\pi_1(|\mathcal{K}|) \cong G$.

Beweis. Sei $M = \{b_1, ds, b_m\}$, $A = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq F(M)$,



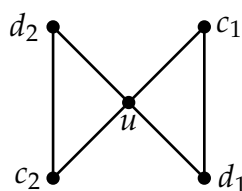
$$b_i = [uc_i d_i u].$$

Dann ist

$$\pi_1(|\mathcal{Y}|) \cong \widehat{\pi}_1(Y, u) \cong F(\{b_1, \dots, b_m\}).$$

Für jedes $\beta_i \in A$ klebe wie in Satz 4.16 ein Polygon (topologische Kreisscheibe) ein. β_i entspricht einem geschlossenen Kantenweg, dessen aufeinanderfolgende Ecken verschieden sind. Dies ergibt ein simplizialen Komplex \mathcal{K} . Nach Satz 4.16 (n mal angewendet) erhält man $\pi_1(|\mathcal{K}|, u) \cong G$. ■

Beispiel $G = F\{a, b\} / \langle a^3, b^4, (ab)^2 \rangle$



Kantenwege:

$$uc_1d_1uc_1d_1uc_1d_1u$$

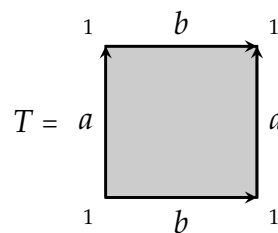
$$uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2u$$

$$uc_1d_1uc_2d_2uc_1d_1uc_2d_2u$$

sa-18

Folgerung 4.18 Nach Satz 4.17 hängt die Fundamentalgruppe eines simplizialen Komplexes nur von dessen 2-dimensionalen Skeletts ab, d.h. wenn \mathcal{K}, \mathcal{L} simpliziale Komplexe sind mit $Sk_2(\mathcal{K}) = Sk_2(\mathcal{L})$, dann ist $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0)$.

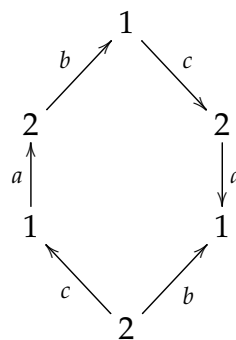
Beispiele (1) Torus



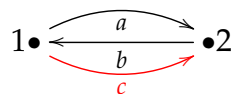
Dann ist

$$\pi_1(T) \cong F\{a, b\} / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(2) Mit natürlicher Eckenidentifikation



Dann



c neutrales Element und

$$\pi_1(\tilde{T}) \cong F(\{a, b\}) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

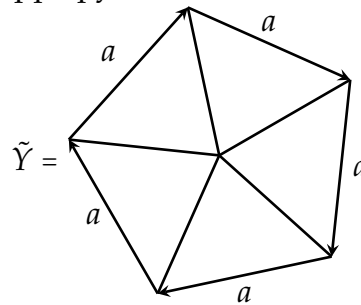
(3) Der Linsenraum $L(p, q)$. Sei $1 \leq q < p$, $p \geq 3$ und p, q teilerfremd. Sei X ein topologischer Raum, der aus einem Doppelkegel über dem regulären p -Eck entsteht durch Identifikation von jedem Dreieck auf der «Oberseite» mit dem entsprechenden Dreieck auf der «Unterseite» nach einer Dreiecksspiegelung um $\frac{2\pi \cdot q}{p}$ zusammen mit der induzierten Identifikation der Kanten und Ecken.

z. B. $L(5, 2)$

Betrachte eine Triangulierung \mathcal{K} von $L(p, q)$, die ein Simplex σ im Inneren der Doppelpyramide hat und x_0 im Inneren von σ . Dann ist die Zentralprojektion von

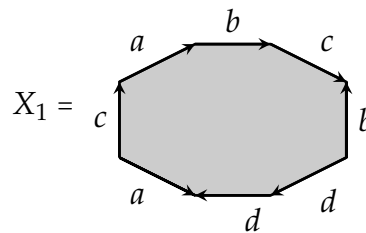
x_0 aus auf den «Rand» (Oberfläche) eine Deformationsretraktion.

Sei Y die Oberfläche der Doppelpyramide **nach** der Identifikation, also

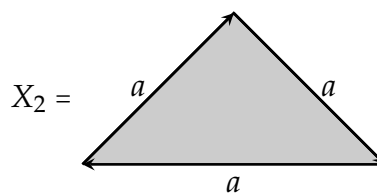


Aufgabe 38 (4 P). Bestimme $\pi_i(X_i)$ $i = 1, 2, 3$ jeweils mit der natürlichen Identifikation der Ecken, wobei

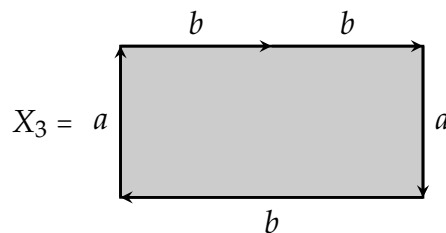
(a)



(b)

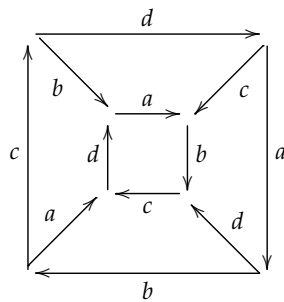


(c)



Aufgabe 39 (7 P). Sei X der Raum, der entsteht, wenn man beim 3-dimensionalen Würfel Paare gegenüberliegender Seiten nach einer Drehung um 90° miteinander

identifiziert und der induzierten Identifikation der Ecken und Kanten.



Bestimme $\pi_1(X)$

- Als Gruppe durch Erzeugende und Relationen (möglichst vereinfachen mit weniger Erzeugenden) (3 P).
- Zeichne das Cayley-Diagramm der Gruppe und bestimme damit die Ordnung der Gruppe (4 P).