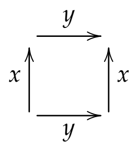
5 Klassifikation der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Satz 5.0 Jede 2-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

Lemma 5.1 *Sei $\mathcal{K}$ ein simplizialer Komplex, sodass $|\mathcal{K}|$ eine zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit ist. Dann ist $|\mathcal{K}|$ homöomorph zu einem Polygon in $\mathbb{R}^2$ mit $2n$ Seiten (für ein $n \geqslant 2$), dessen Kanten in Paaren identifiziert werden mit der induzierten Identifikation der Ecken. Umgekehrt ist ein Polygon mit paarweise identifizierten Kanten und induzierter Identifikation der Ecken eine 2-Mannigfaltigkeit.*

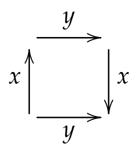
Beweis. Erzählt. ■

Ordne jedem solchen $2n$-Eck mit paarweise identifizierten Kanten ein Wort zu. Mit Buchstaben sind die Kantennamen und formale Inverse (Element der freien Gruppe mit n Erzeugenden) Durchlauf des Randes in festem Umlaufsinn.
Torus



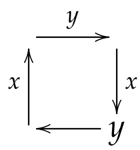
$xyx^{-1}y^{-1}$

Kleinsche Flasche



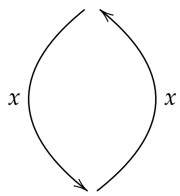
$xyx^{-1}y^{-1}$

Projektive Ebene



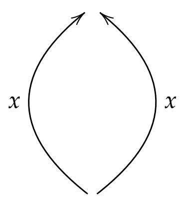
$xyxy$

In Verallgemeinerung sollen



$\cong \mathbb{R}P^2, \quad xx$

und homömorph S^2



$\cong S^2, \quad xx^{-1}$

zugelassen werden. Solche Worte sollen **zulässig** heißen.

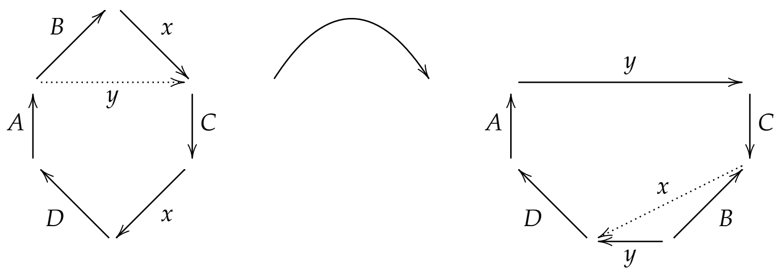
Ziel Durch Zerschneiden und Zusammensetzen des Polygons soll gezeigt werden, dass man stets zu einem Wort in der «Normalform»

$a_1a_1a_2a_2...a_ha_h$ $(h \geqslant 1)$ oder $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ $(g \geqslant 1)$ oder aa^{-1}

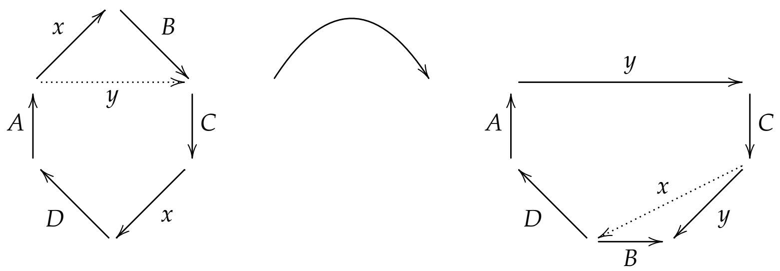
kommen kann.

Regeln

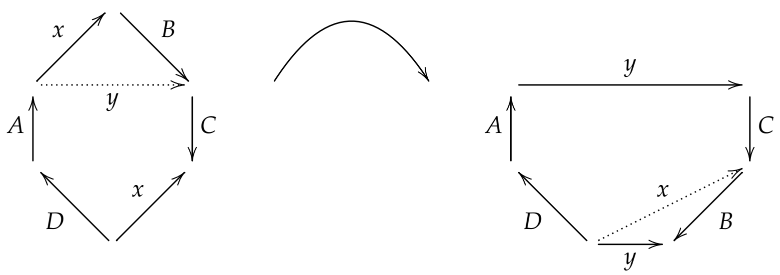
(1a) $ABxCxD \to AxCB^{-1}xD$ (siehe Fußnote [7])



(1b) $AxBCxD \to AxCxB^{-1}D$



(2a) $AxBCx^{-1}D \to AxCBx^{-1}D$



(2b) $ABxCx^{-1}D \to AxCx^{-1}BD$

(3) Falls $AB \neq \square : Axx^{-1}B \to AB$

1. Schritt Bringe das Wort auf die Form RS, wobei

- R von der Form $x_1x_1x_2x_2...x_kx_k$ ist und
- S nur inverse Paare enthält (also jeder Buchstabe in S einmal als x und einmal als x^{-1} vorkommt)

[7] Anschließend benenne y in x um.

Rekursiv (nur Regel 1 anwenden), Annahme A sei schon von der Form $x_1x_1...x_kx_k$ und maximal

$$ABxCxD \xrightarrow{(1a)} AxCB^{-1}xD \xrightarrow{(1b)} AxxBC^{-1}D$$

damit ein weiteres gleichartiges Paar «nach vorne» gebraucht, wende das an solange wie möglich, dann fertig.

2. Schritt Bringe RS auf die Form RTK, wobei T von der Form

$$y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1}...y_mz_my_m^{-1}z_m^{-1}$$

ist und U nur unverschlungene inverse Paare enthält.

- unverschlungene inverse Paare sind von einer der Formen:

$$...x...x^{-1}...y...y^{-1}... \text{ oder } ...x...y...y^{-1}...x^{-1}...$$

- verschlungene inverse Paare von der Form:

$$...x...y...x^{-1}...y^{-1}...$$

Sei A schon von der gewünschten Form (wie RT) und maximal

$$A\boxed{B}\underline{a}CbD\underline{a^{-1}}Eb^{-1}F \xrightarrow{(2)} AaC\underline{b}\boxed{Da^{-1}}BE\underline{b^{-1}}F \xrightarrow{(2)} A\underline{a}\boxed{Cb}BED\underline{a^{-1}}b^{-1}F$$
$$\xrightarrow{(2)} Aa\boxed{BEDC}\underline{b}a^{-1}\underline{b^{-1}}F \xrightarrow{(2)} Aaba^{-1}b^{-1}BEDCF,$$

damit ein weiteres verschlungenes inverses Paar «nach vorne gebracht». Iteriere bis es hinten keine verschlungenen inversen Paare mehr gibt und beachte, dass keine gleichartigen Paare entstehen können.

3. Schritt Falls $RT = \square$, bringe auf xx^{-1}, andernfalls kann U weggelassen werden, wie gezeigt wird. U besteht aus unverschlungenen Paaren.
Sei $...x...x^{-1}...$ eines, welches am engsten zusammen ist. Dann kann kein Buchstabe dazwischen stehen, denn falls y, y^{-1} beide dazwischen liegen, sind $...y...y^{-1}$ enger zusammen, falls von y, y^{-1} nur ein Buchstabe dazwischen steht bilden x, y ein verschlungenes Paar. Also von der Form

$$U_1xx^{-1}U_1 \xrightarrow{(3)} U_1U_2$$

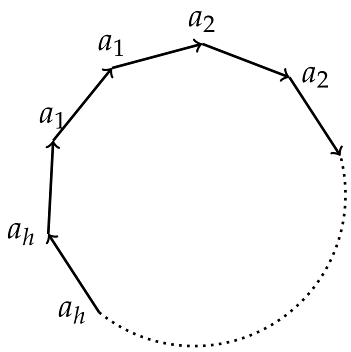
Iteriere bis U verschwunden ist (falls $RT \neq \square$) bzw. xx^{-1} erreicht ist.

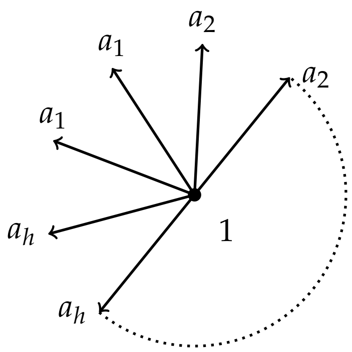
4. Schritt Falls $R = \square$ ist, ist T von der gewünschten Form. Falls $R \neq \square$ ist, bringe RT auf die Form $x_1x_1...x_lx_l$, d.h. führe die verschlungenen inversen Paare in gleichartige Paare über.

$$Axx\boxed{ab}a^{-1}b^{-1}B \xrightarrow{(1)^{\text{invers}}} Ax\underline{b^{-1}}\boxed{a^{-1}xa^{-1}}\underline{b^{-1}}B \xrightarrow{(1)^{\text{invers}}} Ax\underline{a}\boxed{x^{-1}}\underline{a}b^{-1}b^{-1}B$$
$$\xrightarrow{(1)^{\text{invers}}} Axxaab^{-1}b^{-1}B$$

Damit ist gezeigt, dass jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer der folgenden ist:

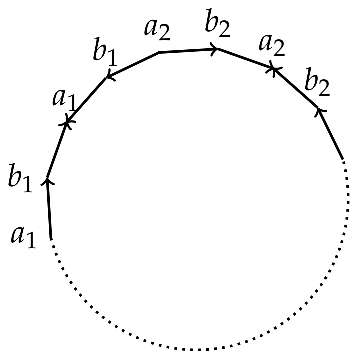
N_h beschrieben durch $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_h a_h$ $h \geqslant 1$:





Umgebung der Ecke 1

M_g beschrieben durch:



Sei G eine Gruppe. Dann bezeichne[8]

$$K(G) := \left\langle \left\{ aba^{-1}b^{-1} \middle| a, b \in G \right\} \right\rangle$$

Offensichtlich ist $K(G)$ der kleinste Normalteiler, so dass $G / K(G)$ abelsch ist. $G / K(G)$ heißt die **Kommutatorfaktorgruppe von** G («G abelsch gemacht»).

Die Fundamentalgruppen

$$\pi_1(M_0) \cong \pi_1(S^2) = \{e\},$$

triviale Gruppe (Tetraeder kontrahierbarer Unterkomplex, der alle Kanten enthält, also 0 Erzeugende, also Fundamentalgruppe trivial).

$$\pi(N_h) \text{ für } h \geqslant 1$$

[8] $\langle \ldots \rangle$ der erzeugte Normalteiler.

also

$$\pi_1(N_h) \cong F(\{a_1, ..., a_h\}) \big/ \langle a_1 a_1 a_2 a_2 ... a_h a_h \rangle$$
$$\pi_1(M_g) \cong F\left(\{a_1, b_1, a_2, b_2 ..., a_g, b_g\}\right) \big/ \left\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} ... a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \right\rangle,$$

also

$$\pi_1(M_g) \big/ K(\pi_1(M_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

da $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} = e$ in einer abelschen Gruppe stets gilt.

$$\pi_1(N_h) \big/ K(\pi_1(N_h)) \cong \mathbb{Z}^{h-1} \times Z_2,$$

denn in der frei-abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^h$ mit Basis $a_1, ..., a_h$ können wir auch die Basis $a_1, ..., a_{h-1}$, $a_1 + a_2 + ... + a_h =: \tilde{a}_h$ wählen.
Die Relation $0 = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_h 2\tilde{a}_h$ (additiv geschrieben) zeigt, dass wir $\mathbb{Z}^{h-1} \times Z_2$ erhalten.

Folgerung Die 2-Mannigfaltigkeit M_g ($g \geqslant 0$), N_h ($h \geqslant 1$) haben paarweise nicht isomorphe Fundamentalgruppen und sind damit folglich paarweise nicht homotopieäquivalent, inbesondere paarweise nicht homömorph.

Satz 5.2 *Jede geschlossene* 2*-Mannigfaltigkeiten ist homöomorph zu genau einer der* 2*-Mannigfaltigkeiten* M_g *(*$g \geqslant 0$*) bzw.* N_h *(*$h \geqslant 0$*). Diese sind paarweise nicht homotopie-äquivalent.*

Folgerung Für geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten M, $\tilde{M}$ gilt:

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(\tilde{M}) \Longleftrightarrow M \simeq \tilde{M} \Longleftrightarrow M \cong \tilde{M}$$

Bezeichne f_0 die Zahl der Ecken, f_1 die Zahl der Kanten, f_2 die Zahl der Flächen (Polygone) *nach* Identifikation. Dann gilt

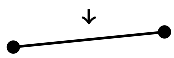
$$f_0 - f_1 + f_2$$

ist nur von der Mannigfaltigkeit abhängig, aber nicht von der Zerlegung.

$$\chi(X) := f_0 - f_1 + f_2$$

heißt die **Euler-Charakteristik von** X.

Beweisskizze. Die folgenden Operationen und ihre Inversen ändern die Euler-Charakteristik nicht:

(1) Einfügen einer Ecke auf eine Kante  $f_0 \mapsto f_0 + 1$, $f_1 \mapsto f_1 + 1$, $f_2 \mapsto f_2$
(2) Unterteilen eines Polygons durch Einfügen einer Kante zwischen zwei Ecken: $f_0 \mapsto f_0$, $f_1 \mapsto f_1 + 1$, $f_2 \mapsto f_2 + 1$

■

Verallgemeinerung Endliche CW-Räume

Definition Ein **in Zellen zerlegter Raum** X ist ein topologischer Raum X, zusammen mit einer Menge Z von Unterräumen, sodass gilt:

(1) Jedes Element von Z ist homöomorph zu einer offenen Kugel (irgendeiner endlichen Dimension).

(2) $X = \bigcup Z$ und die Mengen in Z sind paarweise disjunkt.

Definition Das n-**dimensionale Gerüst** von X ist

$$X^n := \bigcup \{e \in Z \mid \dim e \leqslant n\}.$$

Definition $e \subseteq X$ heißt eine **n-Zelle**, falls $e \cong B^n$ (offene Kugel). Sei $e \subseteq X$ eine n-Zelle. Eine stetige Abbildung $F : D^n \to X$ heißt eine **charakteristische Abbildung** von e,[9] wenn $F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ gilt und $F\big|_{B^n}^{e} : B^n \to e$ ein Homöomorphismus ist. $F\big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ nennt man eine **Klebeabbildung von** e.

Bemerkung Sei X hausdorffsch (T_2). Dann gilt:

$$\overline{e} = F(D^n) \subseteq X^{n-1} \cup e$$

und

$$\overline{e} \setminus e = F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}.$$

$F : D^n \to \overline{e}$ ist identifizierend.[10]

Definition Ein **CW-Raum** ist ein in Zellen zerlegter T_2-Raum, sodass jede Zelle $e \in Z$ eine charakteristische Abbildung besitzt und

(C) für jede Zelle $e \in Z$ gilt: $\overline{e}$ trifft nur endlich viele Zellen.[11]

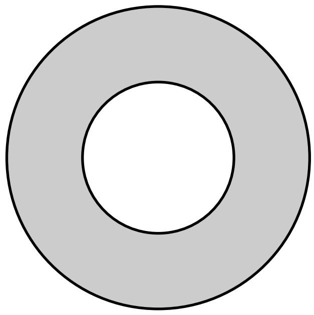
(W) wenn $A \cap \overline{e}$ abgeschlossen in $\overline{e}$ für alle $e \in Z$ ist, dann ist A abgeschlossen in X.[12]

Definition Falls $X = X^n$ und $X \neq X^{n-1}$ dann heißt X n-**dimensional**, geschrieben $\dim X = n$. $\dim X = \infty$, falls es kein solches n gibt. X heißt **endlicher CW-Raum**, falls Z endlich ist.

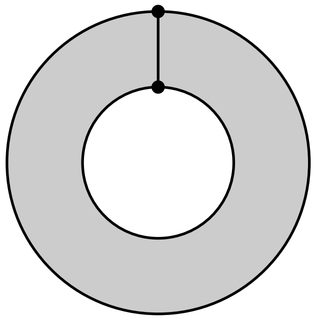
Bemerkung Falls Z endlich ist, dann sind die Forderungen **(C)** und **(W)** automatisch erfüllt.

Beispiel

[9] D^n ist die abgeschlossene n-dimensionale Kugel.
[10] $\overline{e}$ trägt die Finaltopologie bzgl. F.
[11] (C) = closure.
[12] D.h. X trägt die induzierte Topologie, die von diesem Unterraum erzeugt wird. (W) = weak topology.



nicht als CW-Raum dargestellt



CW-Raum $f_0 = 2$, $f_1 = 3$, $f_2 = 1$

Satz und Definition Sei X ein endlicher CW-Raum. Dann bezeichne $f_i(X)$ die Anzahl der i-dimensionalen Zellen.

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i f_i(X)$$

heißt die **Euler-Charakteristik von** X und es gilt für CW-Räume

$$X, Y : X \simeq Y \Longrightarrow \chi(X) = \chi(Y),$$

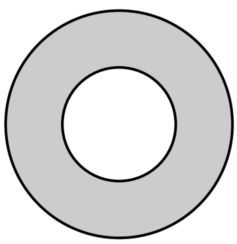
d.h. die Euler-Charakteristik ist eine Invariante für Homotopie-Äquivalenz.

Klassifikation der kompakten zusammenhängenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten:

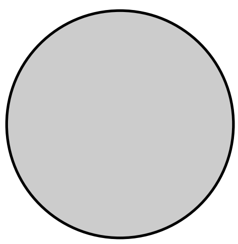
Jede solche ist homömorph zu entweder $M_{g,r}$ oder $N_{h,r}$. Dabei ist $M_{g,r}$ bzw. $N_{h,r}$ homömorph zu M_g bzw. N_h aus dem r 2-Zellen $e_1, \ldots, e_r$ entfernt wurden mit $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
Ferner gilt: Diese sind paarweise nicht homömorph und:

$$\begin{aligned}
\chi(M_g) &= 1 - 2g + 1 = 2 - 2g \\
\chi(M_{g,r}) &= 2 - 2g - r \\
\chi(N_h) &= 1 - h + 1 = 2 - h \\
\chi(N_{h,r}) &= 2 - h - r
\end{aligned}$$

Beispiel



$M_{0,2}$



$M_{0,1}$

Orientierbarkeit

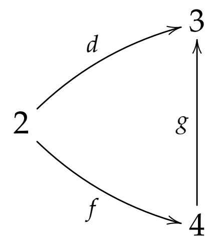
Sei M eine (eventuell berandete) 2-Mannigfaltigkeit, die über ein Polygon mit Kantenidentifikation gegeben ist. Dann gilt: Falls mindestens eine Kante zwei mal als x auftritt (in der selben Orientierung), dann ist $M \cong N_{h,r}$ für ein h, r; anderenfalls $M \cong M_{g,r}$ für ein g, r. r ist dabei die Anzahl der Komponenten des Mannigfaltigkeitsrandes.[13]

Beispiel

$${}_1a_1b_2c_1a_1^{-1}c_2^{-1}d_3\underline{e}_1b_2f_4g_3\underline{e}_1$$

ist nicht orientierbar (beachte e) und

$$\begin{aligned} \chi &= \underset{f_0}{4} - \underset{f_1}{7} + \underset{f_2}{1} = -2 \\ r &= 1 \\ M &\cong N_{h,1} \\ \chi(M) &= -2 = 2 - h - 1 \Longrightarrow h = 3 \end{aligned}$$



also $M \cong N_{3,1}$.

Folgerung 5.3 Zwei möglicherweise berandete kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten sind genau dann homömorph, wenn beide orientierbar oder beide nicht orientierbar sind, dieselbe Euler-Charakteristik und dieselbe Zahl von Randkomponenten besitzen.

Seien A_1, A_2 zwei zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten. Dann bezeichne $A_1 \sharp A_2$ die Mannigfaltigkeit, die entsteht indem aus A_1 und A_2 eine offene 2-Zelle entfernt wird und anschließend A_1 und A_2 verklebt werden durch einen Homöomorphismus der entstehenden Ränder.

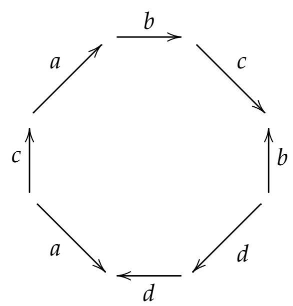
Aufgabe 40 (2 P). Bestimme, um welche geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten es sich handelt.

(a) $M_{g_1} \sharp M_{g_2}$

(b) $M_g \sharp N_h$

(c) $N_{h_1} \sharp N_{h_2}$

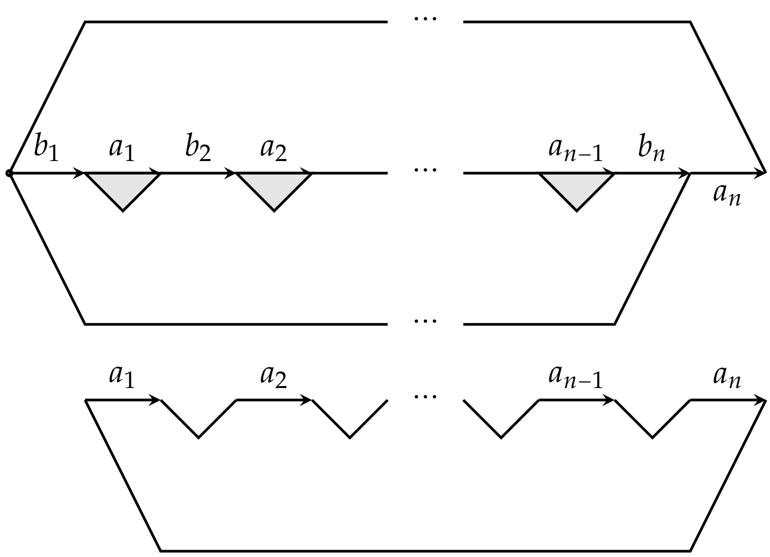
(d)



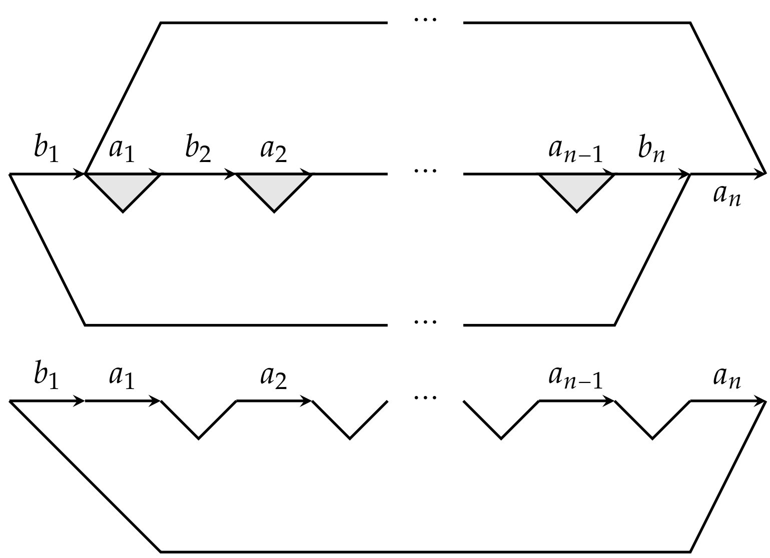
[13]Betrachte alle Kanten, die nicht zwei mal auftreten und beachte die Eckenidentifikation.

Aufgabe 41 (4 P). Bestimme von welchem Typ die folgenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten sind (unbezeichnete Kanten werden nicht identifiziert).

(i)



(ii)



(iii)