6 Homologiegruppen

Definition Für $n \geqslant 0$ bezeichne $\Delta_n := \operatorname{konv}\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ das «Standardsimplex», $a_0 := 0$, $a_i = e_i$ (i-ter Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^n$), wobei $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$ für $m > n$ betrachtet wird.
Sei X ein topologischer Raum. Ein **singuläres n-Simplex** ist eine stetige Abbildung $\lambda : \Delta_n \to X$.

Definition Sei M eine Menge.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^{(M)} := \operatorname{FAb}(M) &:= \{f : M \to \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in M\} \\ &\subseteq \operatorname{Abb}(M, \mathbb{Z})\end{aligned}$$

heißt **freie abelsche Gruppe**. Wir fassen M als Teilmenge von FAb(M) auf, indem wir $x \in M$ mit $f_x : M \to \mathbb{Z}$ identifizieren, wobei

$$f_x(y) := \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

Definition Die **n-te singuläre Kettengruppe von X** ist

$$S_n(X) := \operatorname{FAb}\{\lambda : \Delta_n \to X \mid \lambda \text{ stetig}\} \text{ für } n \geqslant 0,$$
$$S_n(X) := 0 \text{ (triviale Gruppe) für n} < 0.$$

Die r-te **Seitenabbildung** $F^r : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ ist die simpliziale Abbildung mit

$$F^r(a_i) = \begin{cases} a_i & i \leqslant r-1 \\ a_{i+1} & i \geqslant r \end{cases}.$$

F^r ist ein singuläres $(n-1)$-Simplex in Δ_n.

Bezeichnung Falls $\mathcal{K}$ ein simplizialer Komplex ist, dann bezeichne $(x_0, \dots, x_n)$ die eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung $\varphi : \Delta_n \to \mathcal{K}$ mit $\varphi(a_i) = x_i$. Dann kann F^r auch als

$$(a_0, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_n) \text{ bzw. kürzer } (a_0, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n)$$

geschrieben werden. Offenbar gilt für $s < r$:

$$F^r F^s = F^s F^{r-1} = (a_0, \dots, \hat{a}_s, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n) \tag{$*$}$$

$$\begin{tikzcd}
& \Delta_{n-1} \arrow[dr, "F_r"] & \\
\Delta_{n-2} \arrow[ur, "F_s"] \arrow[dr, "F_{r-1}"'] & & \Delta_n \\
& \Delta_{n-1} \arrow[ur, "F_s"'] &
\end{tikzcd}$$

Definition Sei $n \geqslant 1$, X ein topologischer Raum. Dann bezeichne

$$\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus mit

$$\partial(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^r \lambda \circ F^r$$

für alle singulären n-Simplizes, mit $\lambda : \Delta_n \to X$. ∂ heißt die **Randabbildung**.

Proposition 6.1 (!) *Sei X ein topologischer Raum, $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt:* $\boxed{\partial^2 = 0}$

$$S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$$

Beweis. Für $n < 2$ trivial. Für $n \geqslant 2$ reicht es die Behauptung für die singulären n-Simplizes zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\partial^2(\lambda) = \partial\left(\sum_{r=1}^{n}(-1)^r \lambda\, F^r\right) &= \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+s}\lambda F^r F^s \\ &\overset{*}{=} \sum_{0 \leqslant s < r \leqslant n} (-1)^{r+s}\lambda\, F^s F^{r-1} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant s \leqslant n-1} (-1)^{r+s}\lambda\, F^r F^s\end{aligned}$$

Für $0 \leqslant i \leqslant j < n$ kommt der Term $\lambda F^i F^j$ in der ersten Summe mit dem Koeffizienten $(-1)^{i+j+1}$ und in der zweiten Summe mit $(-1)^{i+j}$ vor, also $\partial^2(\lambda) = 0$. ■

Definition Sei A_i, $i \in I$ eine Familie von abelschen Gruppen. Dann ist die **direkte Summe** $\bigoplus_{i \in I} A_i$ definiert als

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i \in I} A_i := \Big\{\varphi : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \text{ und} \\ \varphi(i) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I\Big\} \\ \subseteq \prod_{i \in I} A_i\end{aligned}$$

$(\varphi + \psi)(i) := \varphi(i) + \psi(i)$ **in** A_i.

Definition Ein **Kettenkomplex** C ist eine Familie C_i von abelschen Gruppen, $i \in \mathbb{Z}$, zusammen mit Homomorphismen $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ mit $C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{n-2}$, $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Wir betrachten $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$, $\partial : C \to C$ Homomorphismus mit $\partial(x_i) = \partial_i(x_i)$ für $x_i \in C_i$, also $\partial \circ \partial = 0$, $\partial(C_n) \subseteq C_{n-1}$, wobei C_n als Untergruppe von C aufgefasst wird.

Definition Sei C ein Kettenkomplex. Dann heißt

$$B_n(C) := \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n$$

Gruppe der n-Ränder und

$$Z_n(C) := \ker \partial_n \subseteq C_n$$

Gruppe der n-Zyklen. Wegen $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ ist $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$.

$$H_n(C) := Z_n(C) \big/ B_n(C)$$

heißt die **n-te Homologiegruppe von C**.

Festellung und Definition Sei X ein topologischer Raum. Dann ist

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

ein Kettenkomplex $S(X)$.

$$H_n(X) := H_n(S(X))$$

heißt die **n-te Homologiegruppe von** X.

$$B_n(X) := B_n(S(X))$$

$$Z_n(X) := Z_n(S(X))$$

Definition Sei (X, Y) ein Paar von topologischen Räumen ($Y \subseteq X$ Unterraum). Dann ist der **relative singuläre Kettenkomplex** $S(X, Y)$ definiert durch

$$S_n(X, Y) := S_n(X) / S_n(Y).$$

$S_n(Y) \subseteq S_n(X)$ in natürlicher Weise: Für jedes singuläre n-Simplex in Y als singuläres n-Simplex in X mit $\lambda : \Delta_n \to Y$ wird $\lambda : \Delta_n \to X$ zugeordnet (Komposition mit Inklusionsabbildung $Y \hookrightarrow X$).

$\partial_n : S_n(X, Y) \to S_{n-1}(X, Y)$ ist der durch $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ induzierte Homomorphismus, der wegen $\partial_n(S_n(Y)) \subseteq S_{n-1}(Y)$ existiert. Es ist klar, dass $\partial^2 : S_n(X, Y) \to S_{n-2}(X, Y)$ die Nullabbildung ist.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & S_n(Y) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook] & S_{n-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_{n-2}(Y) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots & S(Y) \arrow[d, hook] \\
{} \arrow[r] & S_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\text{nat}"] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\text{nat}"] & S_{n-2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\text{nat}"] & \cdots & S(X) \arrow[d, "\text{nat}"] \\
{} \arrow[r] & S_n(X, Y) \arrow[r, "\partial"] & S_{n-1}(X, Y) \arrow[r] & S_{n-2}(X, Y) \arrow[r] & \cdots & S(X, Y) \arrow[d] \\
 & & & & & 0
\end{tikzcd}$$

Beispiel 1 Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum mit m Wegzusammenhangskomponenten. Wegen $S_{-1}(X) = 0$ ist

$$Z_0(X) = \ker(\partial : S_0(X) \to S_{-1}(X)) = S_0(X).$$

Als Erzeugendensystem von $S_0(X)$ können wir die Punkte X nehmen (identifiziere $\lambda : \Delta_0 = \{0\} \to \lambda$ mit $\lambda(0)$).

Für $S_1(X)$ sind das Erzeugendensystem die Wege $\lambda : \Delta_1 = [0, 1] \to X$ und $\partial(\lambda) : \Delta_0 \to X$ ist

$$\partial(\lambda)(0) = \lambda F^0(0) - \lambda F^1(0) = \lambda(1) - \lambda(0).$$

$$B_0(X) = \partial(S_1(X)) = \langle\{b - a \mid a, b \in X \text{ und es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b\}\rangle$$
$$Z_0(X) = S_0(X) = \{f : X \to \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x\}$$
$$B_0(X) = \{f : X \to \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \text{ und } \sum_{x \in K_i} f(x) = 0$$
$$\text{für jede Wegzusammenhangskomponenten } K_i \text{ von } X\}$$

Also $H_0(X) = Z_0(X) \big/ B(X) \cong \mathbb{Z}^m$.

Beispiel 2 Sei $P = \{p\}$ ein einpunktiger Raum. Dann gilt für $n \geqslant 0 : S_n(P) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt die einzige Abbildung $\lambda : \Delta_n \to \{p\}$. Für $\partial : S_n(P) \to S_{n-1}(P)$ gilt

$$\partial(\lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^r \lambda_n F^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \lambda_{n-1} = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} S_{n+1} \xrightarrow{\partial} S_n \xrightarrow{\partial} S_{n-1} & \qquad & \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{\partial} S_0 \xrightarrow{\partial} S_{-1} \\ \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

also für $n \geqslant 2$ gerade ist $Z_n(P) = 0$, also $H_n(P) = 0$. Für $n \geqslant 1$ ungerade ist $B_n(P) = Z_n(P) = S_n(P) = \mathbb{Z}$, also $H_n(P) = 0$. Für $n < 0$ ist $Z_n(X) = 0$, also $H_n(X) = 0$. $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ klar.

Definition Seien C, D Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung** $\varphi : C \to D$ ist ein Homomorphismus $\varphi : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \to \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\varphi(C_n) \subseteq D_n$ und $\varphi\partial = \partial\varphi$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Proposition 6.2 (und Definition (!!)) *Eine Kettenabbildung $\varphi : C \to D$ induziert für jedes n einen Homomorphismus $\varphi_* : H_n(C) \to H_n(D)$. $(\text{id}_C)_* : H_n(C) \to H_n(C)$ ist die Identität. $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ (für eine Kettenabbildung $\psi : D \to E$).*

Beweis. Wegen $\partial\varphi = \varphi\partial$ ist klar, dass

$$\varphi(B_n(C)) = \varphi\partial(C_{n+1}) = \partial(\varphi(C_{n+1})) \subseteq \partial(D_{n+1}) = B_n(D).$$

Für $x \in Z_n(C) \Longrightarrow \partial x = 0 \Longrightarrow \varphi\partial x = 0 \Longrightarrow \partial\varphi x = 0 \Longrightarrow \varphi(x) \in Z_n(D)$.
Also $\varphi(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$ und φ induziert einen Homomorphismus (Homomorphiesatz)

$$\varphi_* : Z_n(C) \big/ B_n(C) \to Z_n(D) \big/ B_n(D).$$

■

Proposition 6.3 *Sei $f : (X,Y) \to (A,B)$ eine stetige Abbildung von Paaren. Dann induziert f eine Kettenabbildung $f_\bullet : S(X,Y) \to S(A,B)$ und Homomorphismen $f_* : H_n(X,Y) \to H_n(A,B)$ mit der Eigenschaft*

(a) $\mathrm{id}_\bullet = \mathrm{id}$, $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$

(b) $(fg)_\bullet = f_\bullet g_\bullet$, $(fg)_* = f_* g_*$

für $g : (U,V) \to (X,Y)$ eine stetige Abbildung von Paaren.

Beweis. $f_\bullet : S(X,Y) \to S(A,B)$ wird definiert durch

$$f_\bullet = f \circ \lambda : \Delta_n \to A,$$

für $\lambda : \Delta_n \to X$ stetig. Dies definiert eine Kettenabbildung $f_\bullet : S(X) \to S(A)$ mit $f_\bullet(S(Y)) \subseteq S(B)$, also auch eine Kettenabbildung $f_\bullet : S(X,Y) \to S(A,B)$.
$\mathrm{id}_\bullet = \mathrm{id}$, $(fg)_\bullet = f_\bullet g_\bullet$ sind klar. $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$, $(fg)_* = f_* g_*$ folgt mit Proposition 6.2. ∎

Definition Seien C, D Kettenkomplexe, $\varphi, \psi : C \to D$ Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie** h zwischen φ und ψ ist ein Homomorphismus $h : C \to D$, sodass $\varphi(c) - \psi(c) = \partial h(c) + h\partial(c)$ für alle $c \in C$ und $h(C_n) \subseteq D_{n+1}$.
Die Kettenabbildung φ und ψ heißen **kettenhomotop**, falls es eine Kettenhomotopie zwischen φ und ψ gibt, geschrieben $\varphi \simeq \psi$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposition 6.4 *Seien $\varphi, \psi : C \to D$ Kettenabbildungen.*

(a) Aus $\varphi \simeq \psi$ folgt $\varphi_* = \psi_* : H_n(C) \to H_n(D)$.

(b) Falls $\alpha : B \to C$, $\beta : D \to E$ Kettenabbildungen sind und h eine Kettenhomotopie zwischen φ und ψ, dann sind $H \circ \alpha$ und $\beta \circ h$ Kettenhomotopien zwischen $\varphi \circ \alpha$ und $\psi \circ \alpha$ bzw. $\beta \circ \varphi$ und $\beta \circ \psi$.

Beweis. Sei $[z] \in H_n(C)$, wobei $z \in Z_n(C)$ und $\varphi_*([z]) = [\varphi(z)]$, also

$$\varphi(z) - \psi(z) = \partial h(z) + h\partial(z) = \partial h(z),$$

da $\partial(z) = 0$ (wegen $z \in Z_n(C)$). Also $\varphi_* = \psi_*$. Damit ist (a) gezeigt. Zu (b):

$$\varphi_\alpha(c) - \psi_\alpha(c) = \partial h\alpha(c) + h\partial\alpha(c) = \partial(h\alpha)(c) + (h\alpha)\partial(c)$$

und $h\alpha(B_n) \subseteq D_{n+1}$ klar. βh Kettenabbildung völlig analog. ∎

Lemma 6.5 *Sei X topologischer Raum, $i_0 : X \to X \times I$, $i_1 : X \to X \times I$ mit $i_0(x) = (x,0)$, $i_1(x) = (x,1)$. Dann gibt es eine Kettenhomotopie $h : S(X) \to S(X \times I)$ zwischen $(i_0)_\bullet$ und $(i_1)_\bullet$, sodass für alle stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ gilt*

$$hf_\bullet = (f \times \mathrm{id})_\bullet h : S_n(Y) \to S_{n+1}(Y \times I)$$

Satz 6.6 (Homotopieinvarianz (!!)) *Falls $f \simeq g : (X,Y) \to (A,B)$ sind, dann ist $f_* = g_* : H_n(X,Y) \to H_n(A,B)$.*

Beweis. Die Kettenhomotopie $h : S(X) \to S(X \times I)$ induziert (nach Lemma 6.5) eine Kettenhomotopie $\overline{h} : S(X,Y) \to S(X \times I, Y \times I)$, da $h(S(Y)) \subseteq S(Y \times I)$ (wähle in 6.5 für f die Einbettung $Y \hookrightarrow X$). Sei $G : (X \times I, Y \times I) \to (A,B)$ eine Homotopie zwischen f und g. Es folgt, dass $G_\bullet \overline{h}$ eine Kettenhomotopie zwischen $G_\bullet(i_0)_\bullet = f_\bullet$ und $G_\bullet(i_1)_\bullet = g_\bullet$ ist, also nach 6.4 $f_* = g_*$. ∎

Corollar 6.7 *Wenn $(X,Y) \simeq (A,B)$ ist, dann ist $H_n(X,Y) \cong H_n(A,B)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wegen $(X,Y) \cong (A,B)$ gibt es $f : (X,Y) \to (A,B)$, $g : (A,B) \to (X,Y)$, sodass $f \circ g \simeq \mathrm{id}$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}$, also nach 6.6 $g_* f_* = (gf)_* = \mathrm{id}$ und $f_* g_* = (fg)_* = \mathrm{id}$. ∎

Definition Zwei Ketten $c_1, c_2 \in C_n$ heißen **homolog**, falls $c_1 - c_2 \in \partial_{n+1}(C_{n+1})$. Also sind zwei Zyklen $c_1, c_2 \in Z_n(C)$ homolog, falls $[c_1] = [c_2]$ in $H_n(C)$.

Definition Eine **Sequenz von abelschen Gruppen** ist eine (eventuell endliche) Folge von abelschen Gruppen mit Gruppenhomomorphismus

$$...C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n+1} \longrightarrow ...$$

Sie heißt **exakt an der Stelle** C_n, falls $f_{n+1}(C_{n+1}) = \ker f_n$. Sie heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

Eine kurze exakte Sequenz ist eine der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

d.h. g surjektiv, f injektiv, $f(A) = \ker g$.

Satz 6.8 (Fünferlemma)

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann gilt:

(a) Falls f_1 surjektiv und f_2, f_4 injektiv, dann ist f_3 injektiv.

(b) Falls f_5 injektiv und f_2, f_4 surjektiv sind, dann ist f_3 surjektiv.

(c) Insbesondere folgt aus f_1, f_2, f_4, f_5 Isomorphismus, dass f_3 ein Isomorphismus ist.

Beweis («Diagrammjagd») (a) Zu zeigen: $\ker f_3 = 0$.

Aus $f_3(a_3) = 0$ folgt $0 = \psi_3 f_3(a_3) = f_4 \varphi_3(a_3)$, also $\varphi_3(a_3) = 0$ (wegen f_4 injektiv), also $a_3 = \varphi_2(a_2)$ für ein $a_2 \in A_2$ wegen $\varphi_2(A_2) = \ker \varphi_3$ (Exaktheit bei A_3), also

$0 = f_3(a_3) = f_3\varphi_2(a_2) = \psi_2 f_2(a_2)$, also $f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$ für ein $b_1 \in B_1$ wegen $\psi_1(B_1) = \ker\psi_2$, also $b_1 = f_1(a_1)$ für ein $a_1 \in A_1$, da f_1 surjektiv, also $f_2(a_2) = \psi_1 f_1(a_1) = f_2\varphi_1(a_1)$, also $a_2 = \varphi_1(a_1)$ (f_2 injektiv), also $a_3 = \varphi_2(a_2) = \varphi_2\varphi_1(a_1) = 0$.

(b) Ähnlich.

■

Bemerkung und Bezeichnung Sei

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\psi"] & B_2 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm. Betrachte

$$\begin{tikzcd} \ker f_1 \arrow[r, "\varphi|"] \arrow[d, hook] & \ker f_2 \arrow[d, hook] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{nat}"'] & B_2 \arrow[d, "\mathrm{nat}"] \\ \operatorname{koker} f_1 \arrow[r, dotted, "\overline{\psi}"] & \operatorname{koker} f_2 \end{tikzcd}$$

wobei

$$\operatorname{koker} f_i := B_i \big/ f_i(A_i).$$

Denn:

$$a_1 \in \ker f_1 \Longrightarrow f_1(a_1) = 0 \Longrightarrow 0 = \psi f_1(a_1) = f_2\varphi(a_1),$$

also $\varphi(a_1) \in \ker f_2$, also $\varphi(\ker f_1) \subseteq \ker f_2$.

Definiere $\overline{\psi}([b_1]) = [\psi(b_1)]$ (also $\mathrm{nat}\,\psi\psi = \overline{\psi} \circ \mathrm{nat}$). Für $a_1 \in A_1$ gilt

$$\mathrm{nat}\,\psi f_1(a_1) = \underbrace{\mathrm{nat}\, f_2}_{=0}\, \varphi(a_1) = 0,$$

also

$$\ker(\mathrm{nat} : B_1 \to \operatorname{koker} f_1) = f_1(A_1) \subseteq \ker(\mathrm{nat} \circ \psi).$$

Lemma 6.9 (Schlangenlemma) *Sei*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[d, "f_3"'] \\ B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit exkaten Zeilen ($\varphi_1(A_1) = \ker\varphi_2$, $\psi_1(B_1) = \ker\psi_2$). Dann gibt es ein induziertes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ker f_1 \arrow[r, "\varphi_1|"] \arrow[d, hook] & \ker f_2 \arrow[r, "\varphi_2|"] \arrow[d, hook] & \ker f_3 \arrow[d, hook] \arrow[dddll, bend right=60, "\partial"'] \\
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\mathrm{nat}"'] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\mathrm{nat}"'] & B_3 \arrow[d, "\mathrm{nat}"] \\
\operatorname{koker} f_1 \arrow[r, dotted, "\overline{\psi}_1"] & \operatorname{koker} f_2 \arrow[r, dotted, "\overline{\psi}_2"] & \operatorname{koker} f_3
\end{tikzcd}$$

(a) *Falls ψ_1 injektiv ist, dann ist die erste Zeile exakt.*

(b) *Falls $\varphi_2 : A_2 \to A_3$ surjektiv ist, dann ist die letzte Zeile exakt.*

(c) *Falls ψ_1 injektiv und φ_2 surjektiv ist, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\partial : \ker f_3 \to \operatorname{koker} f_1$, sodass für alle $a_3 \in \ker f_3$, $b_1 \in B_1$ gilt:*

$$\mathrm{nat}\, b_1 = \partial(a_3) \iff \exists a_2 \in A_2 : \varphi_2(a_2) = a_3 \text{ und } f_2(a_2) = \psi_1(b_1).$$

Es gilt dann ferner: Die Sequenz

$$\ker f_1 \xrightarrow{\varphi_1|} \ker f_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ker f_3 \xrightarrow{\partial} \operatorname{koker} f_1 \xrightarrow{\overline{\psi}_1} \operatorname{koker} f_2 \xrightarrow{\overline{\psi}_2} \operatorname{koker} f_3$$

ist exakt. ∂ heißt der **Verbindungshomomorphismus**.

Beweis. Mäßig lang, elementar. ∎

Definition Eine Folge von Kettenkomplexen und -abbildungen

$$C^i \xrightarrow{f^i} C^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} C^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

heißt **exakt**, falls für jedes n die Folge

$$C^i_n \xrightarrow{f^i_n} C^{i+1}_n \xrightarrow{f^{i+1}_n} C^{i+2}_n \longrightarrow \cdots$$

exakt ist.

Satz 6.10 (und Definition (lange exakte Homologiesequenz)) *Sei*

$$0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\varphi} C^2 \xrightarrow{\psi} C^3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und -abbildungen. Dann gibt es genau einen Homomorphismus (für jedes n) $\partial_* : H_n(C^3) \to H_{n-1}(C^1)$, sodass für alle $z_1 \in Z^1_{n-1}$, $z_3 \in Z^3_n$ gilt

$$[z_1] = \partial_*([z_3]) \iff \exists c_2 \in C^2_n \text{ mit } \psi(c_2) = z_3 \text{ und } \partial(c_2) = \varphi(z_1).$$

Es gilt dann: Die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(C^2) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} \cdots$$

wird exakt.

Beweis mit Schlangenlemma. ■

Satz 6.11 (und Definition, Homologiesequenz eines Raumpaares (!!)) *Für jedes Raumpaar (X,Y) ist die* **zugehörige Homologiesequenz**

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

*exakt. Dabei sind i_* bzw. j_* von den Inklusionsabbildungen $i : Y \to X$ bzw. $j : (X,\varnothing) \to (X,Y)$ induziert und ∂_* der Randoperator $\partial_*([z]_{(X,Y)}) = [\partial z]_Y$. Ferner hat man für eine stetige Abbildung $f : (X,Y) \to (A,B)$ die «***Homologieleiter***» das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(X,Y) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|)_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,Y) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
H_{n-1}(A,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(B) \arrow[r, "\tilde{i}_*"] & H_n(A) \arrow[r, "\tilde{j}_*"] & H_n(A,B) &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Definition ist

$$0 \longrightarrow S(Y) \xrightarrow{i_*} S(X) \xrightarrow{\text{nat}} S(X,Y) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, also nach Satz 6.10 die lange exakte Homologiesequenz. Die Kommutativität ist des Diagramm ist direkt zu sehen. ■

Analog kann man von einem Raumtripel ausgehen $Z \subseteq Y \subseteq X$. Dann erhält man die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S(Y,Z) \xrightarrow{i_*} S(X,Z) \xrightarrow{j_*} S(X,Y) \longrightarrow 0$$

wobei $i : (Y;Z) \to (X,Z)$, $j : (X,Z) \to (X,Y)$. Dann erhalten wir die exakte Homologiesequenz des Tripels

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y,Z) \xrightarrow{i_*} H_n(X,Z) \xrightarrow{j_*} H_n(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Satz (!!) Sei $f : (X,A) \to (Y,B)$ stetig. Dann gilt $\partial_* f_* = \left(f\big|_A\right)\partial_*$, wobei $f\big|_A : A \to B$ und

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial_*"'] & H_n(Y,B) \arrow[d, "\partial_*"] \\
H_{n-1}(A) \arrow[r, "\left(f|_A\right)_*"] & H_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Ausschneidungssatz Sei X topologischer Raum, $A \subseteq X$. Falls U eine offene Teilmenge von X mit $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ ist, dann induziert die Inklusionsabbildung $(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i} (X,A)$ einen Isomorphismus $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i_*} H_n(X,A)$.

Beweis lang. ■

Satz Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt

$$H_1(X) \cong \pi_1(X) \big/ K(\pi_1(X)).$$

Satz Für $n \geqslant 1$:

$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n \text{ oder } m = 0 \\ 0 & m \neq n \text{ und } m \neq 0. \end{cases}$$