



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

# **Algebraische Topologie**

**Prof. Dr. U. Brehm**

Robert Baumgarth

**TU Dresden**

**Fakultät Mathematik**

**Institut für Geometrie**

*Mitschrift*

*SS 2012*

*5. September 2012*

# Inhaltsverzeichnis

0	Topologische Grundlagen - Topologische Räume und stetige Abbildungen	3
1	Homotopie von Abbildungen	20
2	Die Fundamentalgruppe	24
3	Simpliziale Komplexe	32
4	Simpliziale Approximation	41
5	Klassifikation der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	60
6	Homologiegruppen	69
	Index	79

## 0 Topologische Grundlagen - Topologische Räume und stetige Abbildungen

**Definition** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .  $(X, \mathcal{X})$  heißt ein **topologischer Raum** und  $\mathcal{X}$  eine **Topologie** auf  $X$ , falls gilt:

(i)  $X \in \mathcal{X}$

(ii)  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X} \implies \bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{X}$

(iii)  $M_1, M_2 \in \mathcal{X} \implies M_1 \cap M_2 \in \mathcal{X}$

$O \subseteq X$  heißt **offen**, falls  $O \in \mathcal{X}$ .  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A \in \mathcal{X}$ .

Also  $\emptyset, X$  sind stets sowohl offen, als auch abgeschlossen.

**Definition** Sei  $x \in X$ ,  $U \subseteq X$  heißt eine **Umgebung von  $x$** , falls es  $O \in \mathcal{X}$  gibt mit  $x \in O$  und  $O \subseteq U$ .

**Definition und Bemerkung** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ . Dann ist

$$\mathcal{X}_M := \{M \cap O \mid O \in \mathcal{X}\}$$

eine Topologie auf  $M$ , die so genannte **Unterraumtopologie auf  $M$**  und  $(M, \mathcal{X}_M)$  ist ein (topologischer) Unterraum.

**Beispiel** (i) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathcal{X} := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O\},$$

mit  $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  offene  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$ . Dann ist  $\mathcal{X}$  eine Topologie auf  $X$ . Sie heißt die **natürliche Topologie** auf  $X$  (bzgl.  $d$ ).

Besonders wichtig:  $(\mathbb{R}^n, d)$  mit  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

**Beweis.** Aufgabe 1 (1 P). ■

(ii)  $(X, \mathcal{P}(X))$ ,  $\mathcal{P}(X)$  heißt die **diskrete Topologie** auf  $X$ .

(iii)  $(X, \{\emptyset, X\})$ .  $\{\emptyset, X\}$  heißt die **indiskrete Topologie**.

(iv)  $(X, \{O \subseteq X \mid O = \emptyset \text{ oder } X \setminus O \text{ ist endlich}\})$  ist ein topologischer Raum. Sie heißt **cofinite Topologie** auf  $X$ .

**Beweis.** Aufgabe 2 (1 P). ■

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  heißt eine **Basis** von  $\mathcal{X}$ , wenn jede Menge in  $\mathcal{X}$  sich als Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  darstellen lässt.

**Proposition 0.1** Eine Menge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  ist genau dann eine Basis von  $(X, \mathcal{X})$ , wenn für alle  $x \in X$  und alle  $O \in \mathcal{X}$  mit  $x \in O$  ein  $B \in \mathcal{B}$  existiert mit  $x \in B$  und  $B \subseteq O$ .

**Beweis.** Aufgabe 3 (1 P). ■

**Proposition 0.2 (und Definition)** Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit

(a)  $\cup \mathcal{B} = X$

(b)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \text{ und } B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Dann gilt:

(a)  $\mathcal{X} := \{\cup B' \mid B' \subseteq \mathcal{B}\}$  ist eine Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{B}$  ist eine Basis von  $\mathcal{X}$ .

(b)  $\mathcal{X}$  ist die einzige Topologie auf  $X$ , die  $\mathcal{B}$  als Basis hat.

$\mathcal{X}$  heißt die von  $\mathcal{B}$  **erzeugte Topologie**.

**Beweis.** Aufgabe 4 (2 P). ■

**Proposition 0.3 (und Definition)** Sei  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann erfüllt die Menge  $\mathcal{B}$  aller endlichen Durchschnitte zusammen mit  $X$ , also

$$\mathcal{B} := \{\bigcap E \mid E \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich, } E \neq \emptyset\} \cup \{X\},$$

offensichtlich die Bedingungen a) und b) aus Proposition 0.2.

Die von  $\mathcal{B}$  erzeugte Topologie  $\mathcal{X}$  heißt von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{S}$  eine **Subbasis** von  $\mathcal{X}$ .

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann heißt

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$$

**Umgebungsfilter von  $x$ .** Eine Teilmenge  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{U}(x)$  heißt eine **Umgebungsbasis von  $x$** , wenn zu jedem  $U \in \mathcal{U}(x)$  ein  $B \in \mathcal{Z}$  existiert mit  $B \subseteq U$ .

**Beispiel** In einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist  $\{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine Umgebungsbasis von  $x$ .

**Definition** Ein topologischer Raum erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom (1. AA)**, wenn jeder Punkt eines abzählbare Umgebungsbasis hat.

**Bemerkung** Ein topologischer Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom (2. AA)**, wenn  $\mathcal{X}$  eine abzählbare Basis besitzt.

**Folgerung** Ein metrischer Raum erfüllt das 1. AA.

**Proposition 0.4** Folgende Aussagen sind für einen topologische Räum  $(X, \mathcal{X})$  äquivalent:

(i)  $O$  ist offen.

(ii)  $O$  ist Umgebung jeder seiner Punkte.

(iii) Zu jedem  $x \in O$  gibt es  $U \in \mathcal{U}(x)$  mit  $U \subseteq O$ .

**Beweis.** Aufgabe 5 (1 P). ■

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ .

- (i)  $x \in X$  heißt ein **Berührungspunkt** von  $A$ , wenn für alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt:  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- (ii)  $x \in A$  heißt **innerer Punkt** von  $A$ , wenn  $A \in \mathcal{U}(x)$ .

**Proposition 0.5 (und Definition)** (a) Die Menge der Berührungspunkte von  $A$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $A$  enthält. Sie heißt **Abschluss** von  $A$  oder die **abgeschlossene Hülle** von  $A$  und wird mit  $\bar{A}$  bezeichnet.

Also gilt:  $\bar{A}$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die  $A$  enthalten.

(b) Die Menge der inneren Punkte von  $A$  ist die größte offene Menge von  $X$ , die in  $A$  enthalten ist. Sie heißt der **offene Kern** von  $A$  und wird mit  $\overset{\circ}{A}$  bezeichnet.

Also ist  $\overset{\circ}{A}$  die Vereinigung aller offenen Mengen, die in  $A$  enthalten sind.

(c) Die Menge  $\text{bd } A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  heißt der **(topologische) Rand** von  $A$ .

**Beweis.** Aufgabe 6 (2 P). ■

**Definition** Seien  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  Topologien auf  $X$  mit  $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ . Dann heißt  $\mathcal{X}_2$  **feiner** als  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_1$  **gröber** als  $\mathcal{X}_2$ .

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ .  $A$  heißt **dicht** in  $X$ , falls  $\bar{A} = X$ .

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{X})$  und  $(Y, \mathcal{Y})$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  heißt

- (i) **stetig**, wenn für alle  $O \in \mathcal{Y}$  gilt:  $f^{-1}(O) \in \mathcal{X}$
- (ii) **offen**, wenn für alle  $O \in \mathcal{X}$ :  $f(O) \in \mathcal{Y}$
- (iii) **abgeschlossen**, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq X$  gilt, dass  $f(A)$  abgeschlossen.
- (iv) ein **Homöomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv und  $f, f^{-1}$  stetig sind.
- (v) eine **Einbettung**, wenn die Einschränkung von  $f$  auf das Bild ein Homöomorphismus ist, d.h. wenn  $f|_{f(X)}$ , also  $f| : X \rightarrow f(X)$ , ein Homöomorphismus von  $(X, \mathcal{X})$  nach  $(f(X), \tilde{\mathcal{Y}})$  ist, wobei  $\tilde{\mathcal{Y}}$  die Unterraumtopologie auf  $f(X)$  ist.

Offensichtlich gilt:

- (a) Die Komposition von stetigen Abbildungen ist wieder stetig.
- (b) Wenn  $f : (X, \mathcal{X}) \rightarrow (Y, \mathcal{Y})$  stetig ist und  $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}$ , dann ist auch  $f : (X, \mathcal{X}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{Y}_1)$  stetig.
- (c)  $f$  ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn  $f$  bijektiv, stetig und offen ist.

**Definition** Seien  $(X, \mathcal{X})$  und  $(Y, \mathcal{Y})$  topologische Räume.  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig in einem Punkt**  $x \in X$ , wenn zu jedem  $V \in \mathcal{U}(f(x))$  ein  $U \in \mathcal{U}(x)$  existiert mit  $f(U) \subseteq V$ .

**Proposition 0.6** Seien  $(X, \mathcal{X})$  und  $(Y, \mathcal{Y})$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f$  in jedem Punkt  $x \in X$  stetig ist.

**Beweis.** Aufgabe 7 (2 P). Verwende Proposition 0.4. ■

**Definition** Zwei topologische Räume  $(X, \mathcal{X})$  und  $(Y, \mathcal{Y})$  heißen **homöomorph** oder **topologisch äquivalent**, wenn es einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

**Notation**  $(X, \mathcal{X}) \cong (Y, \mathcal{Y})$

**Definition** Sei  $A \subseteq X$ . Eine **Umgebung von  $A$**  ist eine Menge  $U \subseteq X$  mit  $A \subseteq U$ , so dass es ein  $O \in \mathcal{X}$  gibt mit  $A \subseteq O \subseteq U$ .

**Proposition 0.7** Seien  $(X, \mathcal{X})$ ,  $(Y, \mathcal{Y})$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $\mathcal{S}$  eine Subbasis von  $\mathcal{Y}$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn für alle  $O \in \mathcal{S}$  gilt:  $f^{-1}(O) \in \mathcal{X}$ .

**Beweis.** Klar, da  $f^{-1}$  mit beliebigen Vereinigungen und Durchschnitten verträglich ist. ■

## Trennungseigenschaften

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Er heißt ein

- (1)  **$T_1$ -Raum**, falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt, es gibt  $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$  mit  $x_1 \in O_1$ ,  $x_2 \in O_2$ , aber  $x_2 \notin O_1$ ,  $x_1 \notin O_2$ .
- (2)  **$T_2$ -Raum** oder **Hausdorff-Raum**, falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt, es gibt  $O_1, O_2 \in \mathcal{X} : x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$  und  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .
- (3)  **$T_3$ -Raum**, falls für alle  $A \subseteq X$ ,  $A$  abgeschlossen,  $x \in X \setminus A$  gilt, es gibt  $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$  mit  $A \subseteq O_1$ ,  $x \in O_2$  und  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .
- (4)  **$T_4$ -Raum**, falls für alle  $A_1, A_2 \subseteq X$  mit  $A_1, A_2$  abgeschlossen und  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  gilt, es gibt  $O_1, O_2 \in \mathcal{X}$  mit  $A_1 \subseteq O_1$ ,  $A_2 \subseteq O_2$ ,  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .
- (3a)  **$T_{3a}$ -Raum**, falls für alle  $A \subseteq X$ ,  $A$  abgeschlossen,  $x \in X \setminus A$  gilt, es gibt eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = 1$  und  $f(A) \subseteq \{0\}$ .
  - **regulär**, falls er ein  $T_1$  und  $T_3$ -Raum ist.
  - **vollständig regulär**, falls er  $T_1$  und  $T_{3a}$ -Raum ist.
  - **normal**, falls er ein  $T_1$  und  $T_4$ -Raum ist.

**Proposition 0.8**  $(X, \mathcal{X})$  ist genau dann ein  $T_1$ -Raum, wenn die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind.

**Beweis.**  $\implies$  Zu  $x \in X$  betrachte für jedes  $y \in X \setminus \{x\}$  eine offene Menge  $O_y$  mit  $y \in O_y$ ,  $x \notin O_y$ . Dann ist

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y = X \setminus \{x\}$$

offen, also  $\{x\}$  abgeschlossen.

$\impliedby$  Die beiden offenen Mengen sind  $X \setminus \{x_2\}$  und  $X \setminus \{x_1\}$ . ■

**Bemerkung** Sei  $X$  Menge. Die cofinite Topologie ist die größte Topologie, so dass  $(X, \mathcal{X})$  ein  $T_1$ -Raum ist. Falls  $X$  unendlich ist, ist  $(X, \mathcal{X})$  mit  $\mathcal{X}$  cofinite Topologie ein  $T_1$ -Raum, aber kein  $T_2$ -Raum.

**Proposition 0.9**  $T_{3a} \implies T_3$ .

**Beweis.** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein  $T_{3a}$ -Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $x \in X \setminus A$ . Dann gibt es  $f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig und  $f(A) \subseteq \{0\}$ ,  $f(x) = 1$ . Dann sind  $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  und  $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  offene disjunkte Umgebungen von  $A$  bzw.  $x$ . ■

**Satz 0.10 (Tietze und Urysohn)** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i)  $(X, \mathcal{X})$  ist normal.
- (ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq X$  und jede stetige Abbildung  $f : A \rightarrow [0, 1]$  (bzgl. der Unterraumtopologie auf  $A$ ) gibt es eine stetige Fortsetzung  $\bar{f} : X \rightarrow [0, 1]$ , wobei Fortsetzung heißt:  $\bar{f}(a) = f(a) \forall a \in A$ .

**Beweis.** Elementar, trickreich und relativ lang (1 – 2 Doppelstunden). ■

**Folgerung 0.11**  $\boxed{\text{normal} \xrightleftharpoons[0.8]{0.10} \text{vollständig regulär} \xrightarrow{0.9} \text{regulär} \xrightarrow{0.8} T_2 \xrightarrow{\text{trivial}} T_1}$

Wähle als abgeschlossene Menge  $A \cup \{x\}$  und als stetige Abbildung  $f : A \cup \{x\} \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(a) = 0 \forall a \in A$  und  $f(x) = 1$ .

**Proposition 0.12** Ein metrischer Raum ist normal.

**Beweis.** Aufgabe 8(3 P). ■

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum.  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X$  eine Folge.  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **konvergiert** gegen  $x \in X$ , falls für jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$  ist endlich (fast alle Folgenglieder liegen in  $U$ ).

**Beispiel** Sei  $X$  eine unendliche Menge und  $\mathcal{X}$  die cofinite Topologie auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathcal{X})$  ein  $T_1$ -Raum, aber kein  $T_2$ -Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  konvergiert gegen **jeden** Punkt in  $X$ .

**Proposition 0.13** Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum. Dann konvergiert eine konvergente Folge gegen genau einen Punkt.

**Beispiel** Sei  $X$  mit  $\text{card } X \geq 2$ . Dann ist  $(X, \{\emptyset, X\})$  ein  $T_3$ - und  $T_4$ -Raum, aber kein  $T_1$ -Raum.

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** (von  $X$ ) ist eine Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$  mit  $\bigcup \mathcal{M} = X$ .

Ein topologischer Raum heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. wenn für alle  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$  mit  $\bigcup \mathcal{M} = X$  eine endliche Teilmenge  $E \subseteq \mathcal{M}$  existiert, mit  $\bigcup E = X$ .

Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ( $T_2$ ) ist.

Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt **kompakt**, wenn  $A$  mit der Unterraumtopologie kompakt ist.

**Satz 0.14** Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Proposition 0.15** Sei  $(X, \mathcal{X})$  kompakt und  $A \subseteq X$ . Dann gilt:  $A$  ist genau dann kompakt, wenn  $A$  abgeschlossen ist.

**Beweis.** Aufgabe 9 (4 P). ■

**Definition** Ein  $T_2$ -Raum  $X$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 0.16** Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum. Dann gilt

(a) Falls  $X$  kompakt ist und das 1. AA erfüllt, dann ist er folgenkompakt.

(b) Falls  $X$  folgenkompakt ist und das 2. AA erfüllt, dann ist er kompakt.

$$\text{kompakt} \begin{array}{c} \xleftarrow{1.AA} \\ \xrightarrow{2.AA} \end{array} \text{folgenkompakt}$$

**Beweis.** Übung. ■

«**Meta-Defintion**» Sei  $E$  eine Eigenschaft eines topologischen Raumes. Man sagt  $X$  hat die Eigenschaft «lokal- $E$ », falls für jeden Punkt  $x$  und jedes  $U \in \mathcal{U}(x)$  ein  $V \in \mathcal{U}(x)$  existiert mit  $V \subseteq U$ , so dass  $V$  (mit Unterraumtopologie) die Eigenschaft  $E$  hat.

**Proposition 0.17** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt  $X$  ist genau dann quasikompakt, wenn für jede (nichtleere) Familie  $(A_i)_{i \in E}$  von abgeschlossenen Mengen gilt: Falls  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$  für jede endliche (nichtleere) Teilmenge  $E \subseteq I$ , dann ist  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .

**Beweis.** Aufgabe 10 (1 P). ■

**Proposition 0.18** Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann gibt es zu jedem Punkt  $x \in X \setminus K$  eine Umgebung  $U$  von  $K$  und eine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .



**Beweis.** Aufgabe 11 (3 P). *Hinweis:* Löse erst Aufgabe 11 und folgere die eine Richtung in Aufgabe 9. ■

**Proposition 0.19** *Ein kompakter Raum ist normal.*

**Beweis.** Aufgabe 12 (3 P). *Hinweis:* Aufgabe 11 und Aufgabe 9 können verwendet werden. ■

**Proposition 0.20** *Sei  $X$  quasikompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann gilt:*

(a)  $f(X)$  ist quasikompakt.

(b) Falls  $Y$  ein Hausdorff-Raum ist, dann ist  $f$  abgeschlossen.

(c) Falls  $Y$  ein Hausdorff-Raum ist und  $f$  bijektiv, dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

**Beweis.** Aufgabe 13 (3 P). ■

**Proposition 0.21** *Ein topologischer Raum  $X$  ist ein  $T_3$ -Raum genau dann, wenn für jeden Punkt die abgeschlossenen Umgebungen von  $x$  eine Umgebungsbasis bilden.*

**Beweis.** Aufgabe 14 (2 P). ■

**Proposition 0.22** *Ein Unterraum eines  $T_1$ -,  $T_2$ -,  $T_3$ - bzw.  $T_{3a}$ -Raumes ist ein  $T_1$ -,  $T_2$ -,  $T_3$ - bzw.  $T_{3a}$ -Raum.*

**Beweis.** Aufgabe 15 (1 P). Zeige es für  $T_3$ . ■

**Achtung** Ein Unterraum eines normalen Raumes **braucht nicht** normal zu sein. Ein abgeschlossener Unterraum eines normalen Raumes ist jedoch stets normal.

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

**Bemerkung** Also folgt aus  $X$  kompakt, dass  $X$  lokalkompakt ist.

**Satz 0.23** *Ein lokalkompakter Raum ist vollständig regulär.*

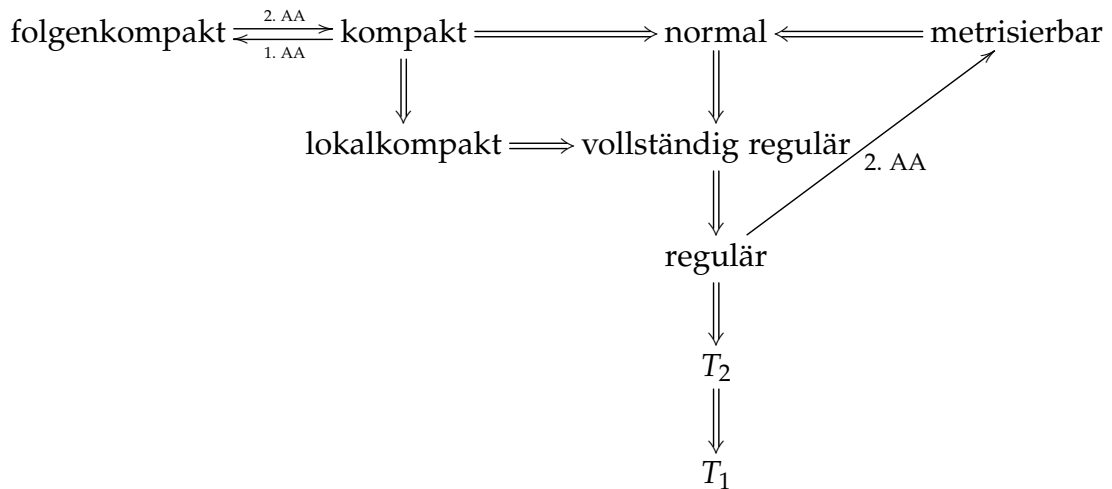
**Bemerkung** In einem lokalkompakten Raum gilt: Zu jedem Punkt und jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  gibt es eine kompakte Umgebung  $V \in \mathcal{U}(x)$  mit  $V \subseteq U$ .

**Beweis.** Sei  $X$  lokalkompakt und  $x \in X$ . Dann gibt es  $W \in \mathcal{U}(x)$  kompakt. Sei  $U \in \mathcal{U}(x)$  beliebig. Es gilt:  $X$  lokalkompakt  $\xrightarrow{P0.23}$   $X$  ist  $T_{3a}$   $\xrightarrow{P0.9}$   $X$  ist  $T_3$   $\xrightarrow{P0.21}$  es gibt eine abgeschlossene Umgebung  $V \in \mathcal{U}(x)$  mit  $V \subseteq U \cap W \xrightarrow[\substack{U \subseteq W \text{ abg.} \\ W \text{ kompakt}}]{}$   $V$  kompakt. ■

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **metrisierbar**, falls es eine Metrik  $d$  auf  $X$  gibt, so dass die zu  $d$  gehörige natürliche Topologie mit der gegebenen Topologie auf  $X$  übereinstimmt.

**Satz 0.24** *Ein regulärer Raum, der das 2. AA erfüllt, ist metrisierbar.*

## Zusammenfassung



## Zusammenhangsbegriffe

**Definition** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{X})$  heißt **zusammenhängend**, falls  $\emptyset, X$  die **einzigen** Mengen sind, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind.

- Bemerkung** (1) Der diskrete Raum  $(X, \mathcal{P}(X))$  mit  $\text{card } X \geq 2$  ist **nicht** zusammenhängend.  
 (2) Der indiskrete Raum  $(X, \{\emptyset, X\})$  ist zusammenhängend.  
 (3)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit der natürlichen Topologie ist nicht zusammenhängend, denn  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  sind offen und abgeschlossen in der Unterraumtopologie.

**Proposition 0.25**  $[0, 1]$  ist zusammenhängend.

**Beweis.** Mit dem Zwischenwertsatz: Angenommen  $[0, 1]$  wäre nicht zusammenhängend und  $A \subseteq [0, 1]$  wäre in  $[0, 1]$  offen und abgeschlossen und  $A \neq \emptyset$ ,  $[0, 1] \neq A$ . Dann wäre die Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in [0, 1] \setminus A \end{cases}$$

stetig, im Widerspruch zum Zwischenwertsatz. ■

**Definition** Bezeichne  $I := [0, 1]$  mit der natürlichen Topologie. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein **Weg** in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $w : I \rightarrow X$ .  $w(0)$  heißt der **Anfangspunkt** und  $w(1)$  der **Endpunkt** von  $w$ .

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn für je zwei Punkte  $x, y \in X$  ein Weg  $w : I \rightarrow X$  existiert mit  $w(0) = x$ ,  $w(1) = y$ .

**Proposition 0.26** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann gilt für  $f(X)$ :

- (a) Falls  $X$  zusammenhängend ist, dann ist  $f(X)$  zusammenhängend (mit der Unterraumtopologie).  
 (b) Falls  $X$  wegzusammenhängend ist, dann ist  $f(X)$  wegzusammenhängend.

**Beweis.** Aufgabe 16 (2 P). ■

**Proposition 0.27** Wenn  $X$  wegzusammenhängend ist, dann ist  $X$  zusammenhängend.

**Beweis.** Aufgabe 17 (1 P). *Hinweis:* Folgere aus Proposition 0.26. ■

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal zusammenhängend (lokal wegzusammenhängend)**, falls zu jedem  $x \in X$  und jedem  $U \in \mathcal{U}(x)$  eine zusammenhängende (wegzusammenhängende) Umgebung  $V \in \mathcal{U}(x)$  existiert mit  $V \subseteq U$ .

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine nichtleere maximale (bzgl.  $\subseteq$ ) zusammenhängende (wegzusammenhängende) Teilmenge heißt eine **Zusammenhangskomponente (Wegzusammenhangskomponente)**.

**Proposition 0.28** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A_1, A_2 \subseteq X$  mit  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ . Falls  $A_1$  und  $A_2$  zusammenhängend (wegzusammenhängend) sind, dann ist auch  $A_1 \cup A_2$  zusammenhängend (wegzusammenhängend).

**Beweis.** Aufgabe 18 (2 P). ■

**Folgerung** Die Zusammenhangskomponenten bzw. Wegzusammenhangskomponenten bilden eine Zerlegung eines topologischen Raumes.

**Proposition 0.29** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  zusammenhängend und  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Dann ist auch  $B$  zusammenhängend.

**Beweis.** Aufgabe 19 (2 P). ■

**Bemerkung** Nach Proposition 0.27 folgt  $X$  lokal wegzusammenhängend  $\implies X$  lokal zusammenhängend.

**Beispiel** (i)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten sind die einelementigen Mengen.

(ii)  $(X, \mathcal{P}(X))$  (diskrete Topologie) mit  $\text{card } X \geq 2$  ist nicht zusammenhängend, aber lokal wegzusammenhängend.

- (iii)  $X = \left\{ \left( t, \sin \frac{1}{t} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(0,0)\}$  ist zusammenhängend ( $\leadsto$  0.26, 0.28 und 0.29), aber nicht wegzusammenhängend und nicht lokal zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente ist  $X$  (da  $X$  zusammenhängend). Die Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  sind

$$\left\{ \left( t, \sin \frac{1}{t} \right) \mid t < 0 \right\}, \{(0,0)\}, \left\{ \left( t, \sin \frac{1}{t} \right) \mid t > 0 \right\}.$$

- (iv) Kegel in  $\mathbb{R}^2$  mit Spitze  $(0,1)$ , Basis  $\left\{ \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0,0)\}$ .  
 $X$  ist wegzusammenhängend.  $X$  ist nicht lokal zusammenhängend, betrachte z. B.  $X = (0,0)$ ,  $U = X \cap (\mathbb{R} \times (-\infty, \frac{1}{2}))$ .

**Also** wegzusammenhängend  $\implies$  zusammenhängend  
 lokal wegzusammenhängend  $\implies$  lokal zusammenhängend

**Konvention** Wenn  $X$  ein topologischer Raum ist,  $A \subseteq X$ , betrachte  $A$  als mit der Unterraumtopologie versehen.

**Mengentheoretische Schreibweise**  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \times \{x_i\}$  (**disjunkte Vereinigung**)

## Initiale und finale Topologie

**Definition und Bemerkung** Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  topologische Räume,  $i \in \mathcal{I}$  und  $f_i : M \rightarrow X_i$  eine Familie von Abbildungen. Dann ist

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{f_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{X}_i\}$$

eine Subbasis der größten Topologie auf  $M$ , sodass alle  $f_i$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) stetig sind. Die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie auf  $M$  heißt **initiale Topologie** auf  $M$  (bzgl. der  $f_i$  und  $(X_i, \mathcal{X}_i)$ ).

**Beweis.** Klar. ■

**Beispiel** (1) Falls  $M \subseteq X$  und  $i : M \rightarrow X$  die Inklusionsabbildung ( $i(x) = x$  für alle  $x \in M$ ) ist, dann ist die initiale Topologie auf  $M$  die Unterraumtopologie, denn  $i^{-1}(A) = A \cap M$ .

(2) **Definition Produktraum** Sei  $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$  (kartesisches Produkt) und  $p_i : X \rightarrow X_i$  die Projektionen. Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  topologische Räume. Dann heißt  $(X, \mathcal{X})$  mit der initialen Topologie  $\mathcal{X}$  bzgl. der  $p_i$  der **Produktraum** und  $\mathcal{X}$  die **Produkttopologie**.

**Bemerkung** Eine Basis der Produkttopologie besteht also aus Mengen der Form

$$\left\{ \prod_{i \in \mathcal{I}} O_i \mid O_i \in \mathcal{X}_i \text{ und } O_i = X_i \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in \mathcal{I} \right\}$$

**Satz 0.30** Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  topologische Räume und  $f_i : X \rightarrow X_i$  Abbildungen und  $\mathcal{X}$  die Initialtopologie auf  $M$ . Dann gilt: Für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{Y})$  und jede Abbildung  $g : Y \rightarrow M$  gilt:  $g$  ist genau dann stetig (bzgl.  $\mathcal{Y}$  und  $\mathcal{X}$ ), wenn die Komposition  $f_i \circ g$  stetig ist für jedes  $i \in \mathcal{I}$ .

**Beweis.**

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & X_i \end{array}$$

Da die  $f_i$  nach Definition der Initialtopologie stetig sind, ist mit  $g$  auch  $f_i \circ g$  stetig. Sei nun  $f_i \circ g$  stetig für jedes  $i \in \mathcal{I}$ . Sei

$$S \in \mathcal{S} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{X}_i\},$$

dann gibt es ein  $i \in \mathcal{I}$  und ein  $O_i \in \mathcal{X}_i$  mit  $S = f_i^{-1}(O_i)$ . Also

$$g^{-1}(S) = g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{Y},$$

da  $f_i \circ g$  stetig ist. ■

**Definition und Bemerkung** Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  topologische Räume und  $f_i : X_i \rightarrow M$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) eine Familie von Abbildungen. Dann ist

$$\mathcal{X} := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{O \subseteq M \mid f_i^{-1}(O) \in \mathcal{X}_i\}$$

die feinste Topologie auf  $M$ , sodass alle  $f_i$  stetig sind. Sie heißt die **Finaltopologie** auf  $M$  (bzgl. der  $f_i$  und  $(X_i, \mathcal{X}_i)$ ).

**Beweis.** Klar, da  $f^{-1}$  beliebige Vereinigungen und Durchschnitte bewahrt und der Durchschnitt von Topologien wieder eine Topologie ist. ■

**Beispiele und wichtige Definitionen** (1) Die  $X_i$  seien disjunkt,  $M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$  und die  $f_i : X_i \rightarrow M$  seien die Inklusionsabbildungen. Dann ist die Finaltopologie offenbar

$$\left\{ \bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i \mid O_i \in \mathcal{X}_i \right\}$$

$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$  mit der Finaltopologie heißt die **(topologische) Summe** der  $(X_i, \mathcal{X}_i)$ .

**Schreibweise**  $\sum X_i$  für  $\bigcup X_i$  mit der Finaltopologie  
 $X + Y$  für  $X \cup Y$  mit der Finaltopologie, usw.

(2) Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  und  $p : X \rightarrow X/R$  die natürliche Abbildung  $p(x) = [x]_R$ . Dann heißt  $(X/R, \tilde{\mathcal{X}})$ , wobei  $\tilde{\mathcal{X}}$  die Finaltopologie auf  $X/R$  bzgl.  $p$  mit  $(X, \mathcal{X})$  ist, der **Quotientenraum** von  $(X, \mathcal{X})$  bzgl.  $R$ .

Dann ist  $p$  stetig und surjektiv.  $p$  ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn jede offene (bzw. abgeschlossene) Menge  $A \subseteq X$  gilt:  $p^{-1}p(A)$  ist offen (bzw. abgeschlossen).

**Satz 0.31** Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  topologische Räume und  $f_i : X_i \rightarrow M$  eine Familie von Abbildungen und  $\mathcal{X}$  die Finaltopologie auf  $M$  (bzgl. der  $f_i$  und  $(X_i, \mathcal{X}_i)$ ). Dann gilt: Für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{Y})$  und jede Abbildung  $g : M \rightarrow Y$  gilt:  $g$  ist genau dann stetig (bzgl.  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ ), wenn  $g \circ f_i$  für jedes  $i \in \mathcal{I}$  stetig ist.

**Beweis.**

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{g} & M \\ & \swarrow g \circ f_i & \uparrow f_i \\ & & X_i \end{array}$$

Da die  $f_i$  nach Definition der Finaltopologie stetig sind, ist mit  $g$  auch  $g \circ f_i$  stetig. Sei nun  $g \circ f_i$  stetig für jedes  $i \in \mathcal{I}$ . Sei  $O \in \mathcal{Y}$ . Dann ist

$$f_i^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{X}_i$$

für alle  $i \in \mathcal{I}$ , also  $g^{-1}(O) \in \mathcal{X}$ . Also ist  $g$  stetig. ■

**Definition** Sei  $(X, \mathcal{X})$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung. Dann heißt die Finaltopologie auf  $Y$  bzgl.  $f$  auch die **Identifizierungstopologie** bzgl.  $f$ .

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  topologische Räume) heißt eine **identifizierende Abbildung**, falls die Topologie auf  $Y$  die Identifizierungstopologie bzgl.  $f$  ist, d.h. wenn  $A \subseteq Y$  genau dann offen ist, wenn  $f^{-1}(A)$  offen in  $X$  ist.

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv. Bezeichne  $R(f)$  die Äquivalenzrelationen

$$R(f) = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$$

und  $\bar{f} : X/R(f) \rightarrow Y$  die eindeutig bestimmte bijektive Abbildung mit  $\bar{f} \circ p = f$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/R(f) & & \end{array}$$

$f$  ist genau dann identifizierend, wenn  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus ist.  $X/R(f)$  trägt die finale Topologie bzgl.  $p$ .

**Bemerkung 0.32** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $R$  bzw.  $S$  Äquivalenzrelation auf  $X$  bzw.  $Y$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, die mit  $R$  und  $S$  verträglich ist,

d.h. aus  $(x, y) \in R$  folgt  $(f(x), f(y)) \in S$ . Dann gibt es genau eine stetige Abbildung  $\bar{f}: X/R \rightarrow Y/S$  mit  $\bar{f} \circ p_R = p_S \circ f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_R \downarrow & & \downarrow p_S \\ X/R & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/S \end{array}$$

nach Satz 0.31 ( $X/R$  hat die finale Topologie bzgl.  $p_R$ ). Ferner gilt: Wenn  $f$  ein Homöomorphismus ist und  $f, f^{-1}$  verträglich mit der Relation sind, dann ist auch  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus.

- Proposition 0.33** (a) Jede stetige surjektive und offene (oder abgeschlossene) Abbildung ist identifizierend.  
 (b) Jede stetige surjektive Abbildung eines kompakten Raumes  $X$  auf einen  $T_2$ -Raum  $Y$  ist identifizierend.  
 (c) Sei  $f: X \rightarrow Y$  identifizierend und  $g: Y \rightarrow Z$  stetig und surjektiv. Dann ist  $g$  genau dann identifizierend, wenn  $g \circ f$  identifizierend ist.

**Beweis.** Aufgabe 20 (3 P). Hinweis: Proposition 0.20 könnte helfen. ■

**Proposition 0.34** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation mit  $A \subseteq X/R$ . Falls  $B := p^{-1}(A)$  offen oder abgeschlossen ist, dann ist die natürliche Bijektion  $A \rightarrow B/R \cap (B \times B)$  ein Homöomorphismus.

**Beweis.** Aufgabe 21 (2 P). ■

### Wichtige Konstruktion

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subseteq X$  abgeschlossen und  $f: A \rightarrow Y$  stetig. Sei  $R$  auf  $X \cup Y$  die von  $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$  erzeugte Äquivalenzrelation (also  $(u, v) \in R$ , falls  $u = v$  oder  $u \in A$  und  $v = f(u)$  oder  $v \in A$  und  $u = f(v)$  oder  $u, v \in A$  und  $f(u) = f(v)$ )

**Bezeichne**  $Y \cup_f X = (X + Y)/R$  mit der Quotiententopologie.

**Sprechweise**  $Y \cup_f X$  entsteht auf  $Y$  **durch Einkleben von  $X$**  mit der Klebeabbildung  $f$ .

Mit Proposition 0.34 folgt:

**Proposition 0.35** Bezeichne  $p: X + Y \rightarrow Y \cup_f X$  die natürliche Abbildung.

- (a) Die Einschränkung  $p|_Y: Y \rightarrow Y \cup_f X$  ist eine Einbettung.

(b) Die Einschränkung  $p|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Y \cup_f X$  ist eine Einbettung.

Der Raum  $Y \cup_f X$  ist also in natürlicher Weise zerlegt in einen abgeschlossenen Unterraum homöomorph zu  $Y$  und einen offenen Unterraum homöomorph zu  $X \setminus A$ . Durch die Klebeabbildung wird beschrieben, wie sie zusammengefügt sind.

**Proposition 0.36** Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $f : X \rightarrow Z$  stetig mit  $\varphi : X \rightarrow Z$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  seien stetige Abbildung, mit  $\varphi|_A = \psi \circ f$ .

Bezeichne  $\varphi + \psi : X + Y \rightarrow Z$  die Abbildung, mit

$$(\varphi + \psi)(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in X \\ \psi(x) & x \in Y \end{cases}$$

Dann ist  $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \rightarrow Z$  wohldefiniert und stetig.

**Beweis.**

$$\begin{array}{ccc} X + Y & \xrightarrow{\varphi + \psi} & Z \\ p \downarrow & \nearrow & \\ Y \cup_f X & & \end{array}$$

ist stetig nach 0.32. ■

**Bezeichnungen**  $B_\varepsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$

$$B^n(x) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

$$D^n(x) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

$X \cong Y$   $X$  ist homöomorph zu  $Y$

$X \not\cong Y$   $X$  ist nicht homöomorph zu  $Y$

**Offensichtlich**  $B^n \cong \mathbb{R}^n$  mit  $x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|}$  (**stereographische Projektion**)

**Also**  $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$  ( $x \in S^n$  beliebig).

**Definition** Ein topologischer Raum, der homöomorph zu  $B^n$  ist, heißt auch eine  **$n$ -Zelle**.

**Weitere Beispiele zum Identifizieren/Klebeabbildung** (1)  $X = D^n$ ,  $A = S^{n-1}$ ,  $Y = \{p\}$  einpunktig,  $f : A \rightarrow \{p\}$  konstant. Dann ist  $\{p\} \cup_f D^n \cong S^n$ .

(2)  $\mathbb{R}P^n := S^n / R$  (Schreibweise  $S^n / \pm \text{id}$ ), wobei  $xRy \iff x = y$  oder  $x = -y$ , d.h. auf  $S^n$  werden Antipodenpunkte identifiziert.

$\mathbb{R}P^n$  heißt der  **$n$ -dimensionale reelle projektive Raum**.

$P(\mathbb{R}^{n+1})$  Punkte, 1-dimensionale lineare Unterraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$

Geraden, 2-dimensionale lineare Unterraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$



Wähle als Repräsentanten Einheitsvektoren, identifiziere  $x$  mit  $-x$ , dann  $X = D^n$ ,  $A = S^{n-1}$ ,  $Y = \mathbb{R}P^{n-1}$ ,  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}/R = \mathbb{R}P^{n-1}$ . Also  $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n$ . Dies ergibt rekursiv eine Zerlegung des  $\mathbb{R}P^n$  in je eine Zelle der Dimension  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Wichtiger Satz vorweg (wird im Folgenden für Folgerungen und Beispiele verwendet) und gegen Ende des Semesters gezeigt (natürlich ohne dafür die Folgerung zu verwenden).

**Satz 0.37 (von der Invarianz des Gebietes)** Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $X \cong Y$ . Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ist  $Y$  offen im  $\mathbb{R}^n$ .

### Folgerungen

**Satz 0.38 (Invarianz der Dimension)** Aus  $m \neq n$  folgt  $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ ,  $S^m \not\cong S^n$ ,  $D^m \not\cong D^n$ .

**Beweis.** Für  $m < n$  ist  $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ , aber  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$ , also nach 0.37  $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ . Wegen  $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ , folgt  $S^n \not\cong S^m$  (für  $m \neq n$ ) nach dem eben Gezeigten. Sei  $m < n$  und  $f : D^m \rightarrow D^n$  ein Homöomorphismus. Dann ist  $\overset{\circ}{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  homöomorph zu  $f^{-1}(\overset{\circ}{D}^n) \subseteq D^m \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht offen in  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n > m$ ),  $\nexists$  zu 0.37. ■

**Satz 0.39 (Invarianz des Randes)** Jeder Homöomorphismus  $f : D^n \rightarrow D^n$  bildet  $S^{n-1}$  auf  $S^{n-1}$  ab.

**Beweis.** Angenommen  $x \in S^{n-1}$  und  $z = f(x) \in \overset{\circ}{D}^n = B^n$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U := B_\varepsilon(z) \subseteq B^n$ . Dann wäre  $f^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^n$ , aber wegen  $f^{-1}(U) \subseteq D^n$  und  $f^{-1}(U) \cap S^{n-1} \neq \emptyset$  nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nexists$  zu 0.37. ■

## Mannigfaltigkeiten

**Definition** Ein topologischer Raum heißt eine **(topologische)  $n$ -Mannigfaltigkeit**, falls er ein  $T_2$ -Raum ist, das 2. AA erfüllt und für jeden Punkt  $x \in M$  existiert entweder eine offene Umgebung  $U$ , die homöomorph zu  $B^n$  ist oder eine offene Umgebung, die homöomorph zu einem abgeschlossenen Halbraum (selber Dimension) des  $\mathbb{R}^n$  ist und so, dass das Bild von  $x$  unter dem Homöomorphismus auf dem Rand liegt.

**Definition** Der **Rand (Mannigfaltigkeitsrand, nicht topologischer Rand!)** einer  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist

$$\partial M := \{x \in M \mid x \text{ hat keine offene Umgebung } U \cong B^n\}.$$

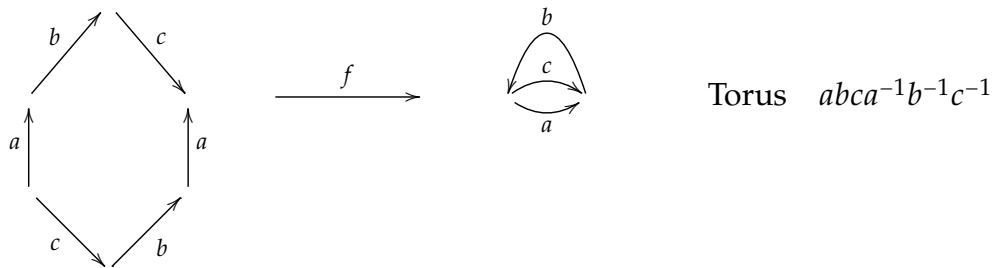
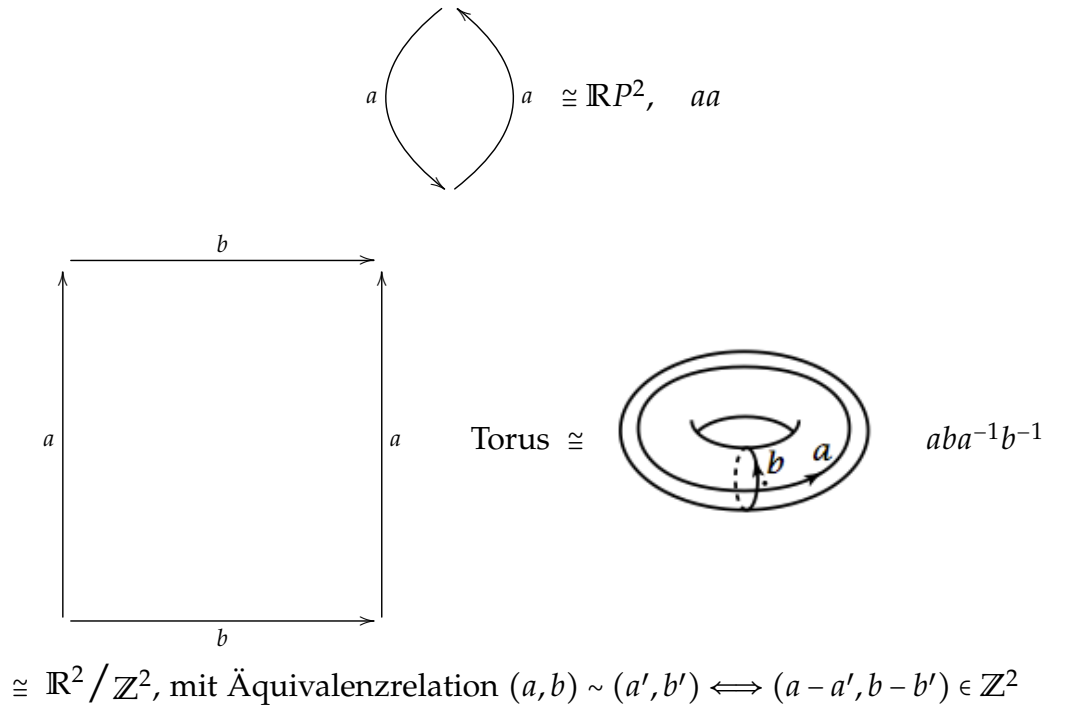
$M$  heißt **unberandet**, falls  $\partial M = \emptyset$ .

$M$  heißt **geschlossen**, falls  $M$  unberandet, kompakt und zusammenhängend ist.

Eine 2-Mannigfaltigkeit heißt auch eine **Fläche**.

Wir werden die geschlossenen 2-Mannigfaltigkeit vollständig klassifizieren.

Es gilt: Jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einem  $2n$ -Eck mit paarweiser Identifikation von Kanten. Zum Beispiel



**Satz 0.40 (Satz von Tychonoff)** Seien  $X_i \neq \emptyset$  topologische Räume.  $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$  ist quasi-kompakt genau dann, wenn jeder der  $X_i$  quasikompakt ist.

### Weitere Beispiele für Quotientenräume

**Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen.  $X/A$  bezeichnet den Quotientenraum bzgl. der Relation

$$xRy \iff x = y \text{ oder } x, y \in A.$$

**Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Der **Kegel** über  $X$  ist

$$CX := X \times [0, 1] / X \times \{1\},$$

mit Spitze (Punkt)  $[X \times \{1\}]_R$ ,

$$\begin{aligned} X &\rightarrow CX \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

ist eine Einbettung (beispielsweise  $CS^n \cong D^n$ ,  $(x, t) \mapsto x(1-t)$ ). Die **Einhängung von**  $X$  ist

$$EX := X \times [0, 1] / X \times \{0, 1\}.$$

**Aufgabe 22 (2 P).** Zeige

- (a)  $f : X \rightarrow Y$  stetig induziert eine stetige Abbildung  $Ef : EX \rightarrow EY$  (1 P).  
 (b)  $ES^n \cong S^{n+1}$  (1 P).

Seien  $X_i$  topologische Räume und  $x_i \in X_i$  mit  $\{x_i\}$  abgeschlossen. Dann heißt

$$VX_i := \sum X_i / A, \text{ mit } A = \{x_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

die **Einpunktvereinigung** der  $(X_i, x_i)$  und  $[A]$  der «**gemeinsame Punkt**».

**Beispiel** Sei  $X_i = [0, 1]$ ,  $x_i = 0$ ,  $\mathcal{I} = \mathbb{N}$  und  $X$  die Einpunktvereinigung und  $x$  der gemeinsamen Punkte.

**Aufgabe 23 (4 P).** Zeige:  $x$  hat keine abzählbare Umgebungsbasis (also erfüllt nicht das 1. AA und ist daher nicht metrisierbar).

**Aufgabe 24 (4 P).** Zeige:  $X$  hat keine kompakte Umgebung.

# 1 Homotopie von Abbildungen

**Definition** Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$  stetig. Dann heißen  $f$  und  $g$  **homotop**, geschrieben  $f \simeq g$ , falls es eine stetige Abbildung  $F : X \times I \rightarrow Y$  gibt mit  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$ , wobei  $I := [0, 1]$ .  $F$  heißt **Homotopie**.

**Beispiel**

$$\begin{array}{ccc} O : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \text{id} : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

sind homotop, denn  $F(x, t) = tx$  ist eine Homotopie.

**Achtung** Ob  $f \simeq g$  ist, hängt auch entscheidend von  $Y$  ab!

**Proposition 1.1**  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ .

**Beweis.** (i)  $f \simeq f$ , denn  $F(x, t) := f(x)$ ,  $F$  ist stetig.

(ii)  $f \simeq g \implies g \simeq f$ , wähle  $\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$ .

(iii)  $f \simeq g, g \simeq h \implies f \simeq h$ : Seien  $F_1, F_2$  Homotopien von  $f$  nach  $g$  bzw.  $g$  nach  $h$ . Dann ist

$$\tilde{F}(x, t) := \begin{cases} F_1(x, 2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ F_2(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie, denn  $F_1(x, 1) = g(x) = F_2(x, 0)$  und falls  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$  mit  $A_i \subseteq X$  abgeschlossen, dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $f|_{A_i}$  stetig ist für  $i = 1, \dots, n$ . ■

**Definition** Zwei topologische Räume  $X, Y$  heißen **homotopie-äquivalent** (oder vom selben **Homotopietyp**), falls es stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  gibt mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ .  $f$  heißt dann eine **Homotopie-Äquivalenz**.

**Schreibweise**  $X \simeq Y$  falls  $X, Y$  homotopie-äquivalent sind.

**Proposition 1.2** (a)  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

(b) Seien  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y, g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen und  $f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1$ , dann gilt:  
 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ .

**Beweis.** b) Sei  $F$  eine Homotopie zwischen  $f_0$  und  $f_1$  und  $G$  eine Homotopie zwischen  $g_0$  und  $g_1$ . Dann ist

$$g_0 \circ F : X \times I \rightarrow Z$$

eine Homotopie zwischen  $g_0 \circ f_0$  und  $g_0 \circ f_1$  und

$$G \circ (f_1 \times \text{id}_I) : X \times I \rightarrow Z$$

eine Homotopie zwischen  $g_0 \circ f_1$  und  $g_1 \circ f_1$ , also gibt es nach Proposition 1.1 eine Homotopie zwischen  $g_0 \circ f_0$  und  $g_1 \circ f_1$ .

a)  $X \simeq X$  und  $X \simeq Y \implies Y \simeq X$  klar. Seien  $X \simeq Y, Y \simeq Z$ ,

$$f_0 : X \rightarrow Y, \quad f_1 : Y \rightarrow X$$

$$g_0 : Y \rightarrow Z, \quad g_1 : Z \rightarrow Y$$

stetig mit

$$f_0 \circ f_1 \simeq \text{id}, \quad f_1 \circ f_0 \simeq \text{id}$$

$$g_0 \circ g_1 \simeq \text{id}, \quad g_1 \circ g_0 \simeq \text{id}$$

Dann gilt:

$$(f_1 g_1)(g_0 f_0) \stackrel{b)}{\simeq} f_1 f_0 \simeq \text{id}_X$$

$$(g_0 f_1)(f_0 g_1) \stackrel{b)}{\simeq} g_0 g_1 \simeq \text{id}_Z \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.3** Seien  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen, so dass für alle  $x \in X$  gilt: Die Verbindungsstrecke zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  liegen in  $Y$ . Dann gilt  $f \simeq g$ .

**Beweis.** Definiere  $F : X \times I \rightarrow Y$  durch  $F(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x)$ . Offensichtlich ist  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  und  $F$  ist stetig.  $\blacksquare$

**Corollar 1.4** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $f, g : X \rightarrow S^{n-1}$  stetig. Falls  $f(x) \neq -g(x)$  für alle  $x \in X$ , dann ist  $f \simeq g$ .

**Beweis.** Betrachte  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Inklusionsabbildung ( $f(x) = x$ ). Dann gibt es nach Lemma 1.3 eine Homotopie  $F : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zwischen  $i \circ f$  und  $i \circ g$  (da nach Voraussetzung die Verbindungsstrecke zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  nicht durch 0 geht). Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad \varphi(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Offenbar ist  $\varphi$  stetig und  $\varphi \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ . Dann ist  $\varphi \circ F$  die gesuchte Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .  $\blacksquare$

**Beispiel** Folgt.

Offensichtlich

$$X \cong Y \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow[\text{i.A.}]{} \end{array} X \simeq Y$$

Die Einteilung in homotopie-äquivalente Räume ist also wesentlich gröber als die Einteilung in homöomorphe Räume. Die topologischen Invarianten, die wir definieren werden für homotopie-äquivalente Räume übereinstimmen.

**Definition**  $(X, A)$  heißt ein **Paar von Räumen** (oder **Raumpaar**), falls  $A \subseteq X$  ein (topologischer) Unterraum ist.

Eine stetige Abbildung  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zwischen Paaren von Räumen ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ .

Zwei stetige Abbildungen  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  heißen **homotop**, falls es eine stetige Abbildung von Räumen  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  gibt, mit  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$  (also insbesondere  $F(a, t) \in B$  für alle  $a \in A$ ,  $t \in I$ ).

Falls  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  stetige Abbildungen von Paaren mit  $f(a) = g(a)$  für alle  $a \in A$ , dann heißen  $f, g$  **homotop relativ zu  $A$** , geschrieben  $f \simeq g \text{ rel } A$ , falls es eine Homotopie  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  gibt mit  $F(a, t) = f(a) = g(a)$  für  $t \in I$ ,  $a \in A$ .

Zwei Paare  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$  heißen **homotopie-äquivalent**, falls es stetige Abbildungen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  von Paaren gibt mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ ,  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  (Homotopie von Paaren).

**Bemerkung** Proposition 1.1, 1.2 gelten entsprechend auch für Paare, Lemma 1.3 ebenfalls (Voraussetzung: die Verbindungsstrecke von  $f(x)$ ,  $g(x)$  liege in  $Y$  für alle  $x \in X$  und in  $B$  für  $x \in A$ ).

Ferner ist auch die Relation  $\simeq \text{rel } A$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren (wobei insbesondere  $f \not\simeq g \text{ rel } A$ , falls  $f|_A \neq g|_A$ ).

**Definition** Ein Unterraum  $A \subseteq X$  heißt ein **Retrakt von  $X$** , falls eine stetige Abbildung  $r : X \rightarrow A$  existiert mit  $r(a) = a$  für alle  $a \in A$ .  $r$  heißt **Retraktion**.

**Bezeichne**  $i : A \rightarrow X$  die Inklusionsabbildung.

**Definition**  $r : X \rightarrow A$  heißt eine **Deformationsretraktion** und  $A$  ein **Deformationsretrakt von  $X$** , falls  $r$  eine Retraktion ist und  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ .

Falls sogar gilt  $i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ , dann heißt  $r$  eine **starke Deformationsretraktion** und  $A$  ein **starker Deformationsretrakt von  $X$**  (falls ein solches  $r$  existiert).

Ein Raum, der homotopie-äquivalent zu einem Punkt ist, heißt **kontrahierbar**.

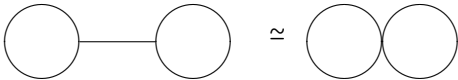
**Bemerkung** Falls  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$  ist, dann ist  $A \simeq X$ .

**Beispiele** (a)  $\mathbb{R}^n$  ist kontrahierbar, denn  $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $F(x, t) = xt$  ist eine Homotopie.  $\{0\}$  ist ein starker Deformationsretrakt des  $\mathbb{R}^n$ .

(b)  $S^1$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $r(x) := \frac{x}{|x|}$ .

(c) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Dann ist die konstante Abbildung  $x \mapsto x_0$  eine Retraktion und  $\{x_0\}$  ein Retrakt, aber z. B. für  $X = S^1$  ist  $S^1 \not\simeq \{x_0\}$  also  $\{x_0\}$  kein Deformationsretrakt von  $S^1$ .

**Aufgabe 25 (6 P).**\* Sei  $X = C\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right)$  (Kegel). Zeige, dass  $\{(0,0)\}$  ein Deformationsretrakt, aber kein starker Deformationsretrakt von  $X$  ist.

**Aufgabe 26 (5 P).** Zeige: 

**Alternativ zu 26, Aufgabe 27 (10 P).** Sei  $G$  ein endlicher zusammenhängender Graph (ungerichtet, Schleifen und Mehrfachkanten zugelassen).  $V$  die Menge der Knoten mit  $v = \text{card } V$ ,  $E$  die Mengen der Kanten mit  $e = \text{card } E$ .

- Beschreibe  $G$  explizit in natürlicher Weise als topologischen Raum (2 P).
- Sei  $a \in E$  eine Kante, die keine Schleife ist (mit Endpunkt  $x, y$  ( $x \neq y$ )). Sei  $G'$  der Graph, der entsteht, wenn man die Kante  $a$  weglassen und  $x$  mit  $y$  indentifizieren kann. Beweise  $G \simeq G'$  (6 P).
- Folgere:  $G$  ( $V \neq \emptyset$ ) ist homotopie-äquivalent zum Graphen mit einer Ecke und  $e - v + 1$  Kanten (Schleifen) (2 P).

## 2 Die Fundamentalgruppe

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0 \in X$ . Ein Weg  $w : I \rightarrow X$  heißt ein **geschlossener Weg mit Basispunkt**  $x_0$ , wenn  $w(0) = w(1) = x_0$ .

Wir führen auf den Homotopieklassen  $\text{rel } \{0, 1\}$  von geschlossenen Wegen mit Basispunkt  $x_0$  eine Gruppenstruktur ein.

Seien  $u, v : I \rightarrow X$  Wege  $w(1) = v(0)$ , dann sind  $uv : I \rightarrow X$ ,  $u^{-1} : I \rightarrow X$  definiert durch

$$uv(s) := \begin{cases} u(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$u^{-1}(s) := u(1-s)$$

$uv$  und  $u^{-1}$  sind stetig (vgl. Argumentation von Satz 1.1).

**Proposition 2.1** (i)  $u_1, u_2, v_1, v_2$  seien Wege in  $X$  mit

$$u_1(0) = u_2(0),$$

$$u_1(1) = u_2(1) = v_1(0) = v_2(0),$$

$$v_1(1) = v_2(1)$$

und mit  $u_1 \simeq u_2 \text{ rel } \{0, 1\}$ ,  $v_1 \simeq v_2 \text{ rel } \{0, 1\}$ , dann gilt

$$u_1 v_1 \simeq u_2 v_2 \text{ rel } \{0, 1\},$$

$$u_1^{-1} \simeq u_2^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}.$$

(ii) Seien  $u, v, w$  Wege in  $X$ , sodass  $uv$  und  $vw$  erklärt sind, dann gilt

$$(uv)w \simeq u(vw) \text{ rel } \{0, 1\},$$

$$uu^{-1} \simeq e_x \text{ rel } \{0, 1\},$$

wobei  $e_x : I \rightarrow X$  die konstante Abbildung  $e_x(t) = x$  sei und  $x = u(0)$ .

**Außerdem gilt**  $e_x u \simeq u e_y \simeq u \text{ rel } \{0, 1\}$ , mit  $x = u(0)$ ,  $y = u(1)$ ,  
 $(u^{-1})^{-1} = u$ .

**Beweis.** (a) Seien  $F$  bzw.  $G$  Homotopien zwischen  $u_1$  und  $u_2$  bzw.  $v_1$  und  $v_2 \text{ rel } \{0, 1\}$ .

Dann ist  $H : I \times I \rightarrow X$  mit

$$H(s, t) := \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen  $u_1 v_1$  und  $u_2 v_2 \text{ rel } \{0, 1\}$ . Es ist nämlich

$$F(1, t) = u_1(1) = u_2(1) = v_1(0) = v_2(0) = G(0, t),$$

und  $\tilde{F}(s, t) := F(1-s, t)$  ist eine Homotopie zwischen  $u_1^{-1}$  und  $u_2^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}$ .

(b)  $(u^{-1})^{-1} = u$  ist klar. Wegen Lemma 1.3 gilt für je zwei stetige Abbildungen



$\varphi, \psi : I \rightarrow I$  mit  $\varphi(0) = \psi(0)$ ,  $\varphi(1) = \psi(1)$ , dass  $\varphi \simeq \psi \text{ rel } \{0, 1\}$ . Offenbar ist

$$(uv)w(s) = u(vw)(\varphi(s)),$$

wobei  $\varphi : I \rightarrow I$  mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ ,  $\varphi(1) = 1$  und affin dazwischen. Nun ist  $\varphi \simeq \text{id}_I \text{ rel } \{0, 1\}$ , also nach Proposition 1.2 (b)

$$(uv)w \simeq u(vw) \text{ rel } \{0, 1\}.$$

$e_x u(s) = u(\varphi(s))$ , wobei  $\varphi : I \rightarrow I$  mit  $\varphi(0) = \varphi(\frac{1}{2}) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  und affin dazwischen, also  $\varphi \simeq \text{id} \text{ rel } \{0, 1\}$  und  $e_x u \simeq u \text{ rel } \{0, 1\}$ .  $e_y u \simeq u \text{ rel } \{0, 1\}$  entsprechend.

$uu^{-1}(s) = u(\varphi(s))$  mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $\varphi(1) = 0$ , also  $\varphi \simeq e_0 \text{ rel } \{0, 1\}$ , also  $uu^{-1} \simeq u \circ e_0 = e_x \text{ rel } \{0, 1\}$ . ■

**Schreibweise**  $u_1 u_2 \cdots u_n := u_1(u_2(\dots u_n) \dots)$

**Satz 2.2 (und Definition)** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0 \in X$ .  $\pi_1(X, x_0)$  bezeichne die Menge der Homotopieklassen  $\text{rel } \{0, 1\}$  geschlossener Wege von  $X$  mit Basispunkt  $x_0$ . Bezeichne  $[w]$  die Äquivalenzklasse von  $w$ .

**Definiere**  $[u] \cdot [v] := [uv]$

Dies ist wohldefiniert und  $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$  eine Gruppe. Sie heißt die **Fundamentalgruppe von  $(X, x_0)$** .

**Beweis.** (i) Wohldefiniertheit folgt nach Proposition 2.1 (a).

(ii)  $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$  ist eine Gruppe nach Proposition 2.1 (b). ■

**Satz 2.3** Seien  $X, Y$  topologische Räume mit  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ ,  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0$ . Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f) := f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \text{ mit } f_{\#}([w]) = [f \circ w] \text{ für alle } [w] \in \pi_1(X, x_0).$$

Ferner gilt:

(a) Falls  $g : Y \rightarrow Z$  stetig ist mit  $g(y_0) = z_0$ , dann gilt  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ .

(b)  $(\text{id}_X)_{\#} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ .

(c) Falls  $g : X \rightarrow Y$  mit  $g(x_0) = y_0$  und falls  $f \simeq g \text{ rel } \{x_0\}$ , dann gilt  $f_{\#} = g_{\#}$ .

**Beweis.**  $f_{\#}$  eindeutig, ist klar.  $f_{\#}$  wohldefiniert, denn aus

$$w_1 \simeq w_2 \text{ rel } \{0, 1\} \text{ folgt } fw_1 \simeq fw_2 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

**Gruppenhomomorphismus** Definiere

$$f \circ (uv)(s) = \begin{cases} f \circ u(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f \circ v(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (f \circ u) \circ (f \circ v)(s),$$

also  $f_{\#}([u][v]) = f_{\#}([u]) \cdot f_{\#}([v])$ , also  $f_{\#}$  Gruppenhomomorphismus. Ferner:

(a)  $(g \circ f)_{\#}([w]) = [g \circ f \circ w] = g_{\#} f_{\#}([w])$

(b) Klar.

$$(c) f_{\#}([w]) = [f \circ w] \stackrel{P1.2 b)}{=} [g \circ w] = g_{\#}([w]) \quad \blacksquare$$

**Satz 2.4 (und Definition)** Seien  $x_0, x_1 \in X$ ,  $u$  ein Weg in  $X$  mit  $u(0) = x_0$ ,  $u(1) = x_1$ . Dann ist

$$u_+ : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \text{ mit } u_+([w]) := [uwu^{-1}]$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ferner gilt:

(a) Falls  $u \simeq v \text{ rel } \{0, 1\}$ , dann ist  $u_+ = v_+$ .

(b)  $(e_x)_+ = \text{id}$

(c) Sei  $v$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_2$ . Dann gilt  $(uv)_+ = u_+v_+$ .

(d) Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$ . Dann gilt

$$f_{\#} \circ u_+ = (f \circ u)_+ \circ f_{\#} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

**Beweis.**  $w_1 \simeq w_2 \text{ rel } \{0, 1\} \implies uw_1u^{-1} \simeq uw_2u^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}$ , also ist  $u_+$  wohldefiniert.

(a)  $u \simeq v \text{ rel } \{0, 1\} \implies uwu^{-1} \simeq uvu^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}$ , also

$$u_+([w]) = [uwu^{-1}] = [vuv^{-1}] = v_+([w]).$$

(b) Klar.

(c)  $(uv)w(uv)^{-1} \simeq u(vwv^{-1})u^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}$ .

**Gruppenhomomorphismus** Es gilt

$$u(w_1w_2)u^{-1} \simeq (uw_1u^{-1})(uw_2u^{-1}) \text{ rel } \{0, 1\},$$

also ist  $u_+$  ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem

$$\begin{aligned} uu^{-1}wuu^{-1} &\simeq w \text{ rel } \{0, 1\} \text{ f\"ur } [w] \in \pi_1(X, x_0) \\ \implies uu^{-1}wuu^{-1} &\simeq w \text{ rel } \{0, 1\} \text{ f\"ur } [w] \in \pi_1(X, x_1) \end{aligned}$$

$(u^{-1})_+ \circ u_+ = \text{id}$ ,  $u_+ \circ (u^{-1})_+ = \text{id}$ , also  $(u^{-1})_+ = (u_+)^{-1}$ , also ist  $u_+$  ein Isomorphismus.

zu (d) Es gilt

$$\begin{aligned} f_{\#} \circ u_+([u]) &= f_{\#}([uwu^{-1}]) \\ [f \circ (uwu^{-1})] &= [(f \circ u)(f \circ w)(f \circ u^{-1})] = (f \circ u)_+ \circ f_{\#}([w]) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Folgerung 2.5** Falls  $X$  zusammenhängend ist, dann gilt für alle  $x_0, x_1 \in X$ :

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

In diesem Fall schreiben wir auch  $\pi_1(X)$  dafür.

**Bemerkung 2.6** Falls  $[u] \in \pi_1(X, x_0)$ , dann ist

$$u_+([w]) = [u][w][u]^{-1},$$

also ist  $u_+$  ein innerer Automorphismus.

**Lemma 2.7** Seien  $F : I \times I \rightarrow X$  stetig,  $u_0, u_1, v_0, v_1 : I \rightarrow X$  definiert durch

$$u_0(t) = F(t, 0), \quad u_1(t) = F(t, 1)$$

$$v_0(t) = F(0, t), \quad v_1(t) = F(1, t)$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{u_1} & \\ v_0 \uparrow & & \uparrow v_1 \\ & \xrightarrow{u_0} & \end{array}$$

Dann gilt  $u_0 v_1 \simeq v_0 u_1 \text{ rel } \{0, 1\}$ .

**Beweis.**  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1 : I \rightarrow I \times I$  und

$$\tilde{u}_0(t) = (t, 0) \quad \tilde{u}_1(t) = (t, 1)$$

$$\tilde{v}_0(t) = (0, t) \quad \tilde{v}_1(t) = (1, t),$$

also  $u_0 = F \circ \tilde{u}_0$  etc. Offenbar gilt dann  $\tilde{u}_0 \tilde{v}_1 \simeq \tilde{v}_0 \tilde{u}_1 \text{ rel } \{0, 1\}$  nach Lemma 1.3. Also

$$u_0 v_1 = F \circ \tilde{u}_0 \tilde{v}_1 \simeq F \circ \tilde{v}_0 \tilde{u}_1 = v_0 u_1 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

■

**Satz 2.8** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ . Sei  $H : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  und  $g$ . Sei  $w : I \rightarrow X$  definiert durch  $w(t) = H(x_0, t)$ . Dann gilt  $f_{\#} = w_+ \circ g_{\#}$ .

**Beweis.** Sei  $u : I \rightarrow X$  stetig mit  $u(0) = u(1) = x_0$ . Wende 2.7 auf  $F = H \circ (u \times \text{id})$  an. Seien

$$u_0(t) := H(u(t), 0) = f \circ u(t)$$

$$u_1(t) := H(u(t), 1) = g \circ u(t)$$

$$v_0(t) := v_1(t) := H(x_0, t) = w(t)$$

Also

$$\begin{aligned} & (f \circ u) \cdot w \simeq w \cdot (g \circ u) \text{ rel } \{0, 1\} \\ \implies & f \circ u \simeq w \cdot (g \circ u) \cdot w^{-1} \text{ rel } \{0, 1\} \\ \implies & f_{\#} = w_+ g_{\#} \end{aligned}$$

■

**Satz 2.9 (Folgerung)**  $f \circ g \simeq \text{id} \implies f_{\#} \circ g_{\#}$  ist ein Isomorphismus (also insbesondere  $g_{\#}$  injektiv,  $f_{\#}$  surjektiv).

Insbesondere: Wegzusammenhängende homotopie-äquivalente topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen:  $X, Y$  wegzusammenhängend und  $X \simeq Y \implies \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ .

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, falls  $X$  wegzusammenhängend ist und  $\pi_1(X)$  die triviale (einelementige) Gruppe ist.

Nach Satz 2.8 ist jeder kontrahierbare Raum einfach zusammenhängend (wegzusammenhängend ist leicht zu sehen).

$S^1$  ist wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend,  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$  (Beweis später).

$S^n$  für  $n \geq 2$  ist einfach zusammenhängend, aber nicht kontrahierbar (Beweis später).

**Poincaré-Vermutung** Jeder einfach zusammenhängende kompakte (unberandete) 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur  $S^3$  (wurde vor wenigen Jahren von Perelman bewiesen).

## Crashkurs Gruppentheorie

**Normalteiler**  $N$  Untergruppe von  $G$  mit  $aN = Na$  (bzw.  $N = aNa^{-1}$ )  $\forall a \in G$

**Faktorgruppe**  $(aN)(bN) = a(Nb)N \stackrel{Nb=bN}{=} abNN = abN$

**natürlicher Homomorphismus**  $\text{nat} : G \rightarrow G/N : g \mapsto gN$

Dann gilt der

**Homomorphie-Satz**  $f : G \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismus, dann

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \text{nat} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/\ker f & & \end{array}$$

existiert ein injektiver Homomorphismus  $\bar{f}$  mit  $f = \bar{f} \circ \text{nat}$ . Falls  $f$  surjektiv ist, ist  $\bar{f}$  ein Isomorphismus.

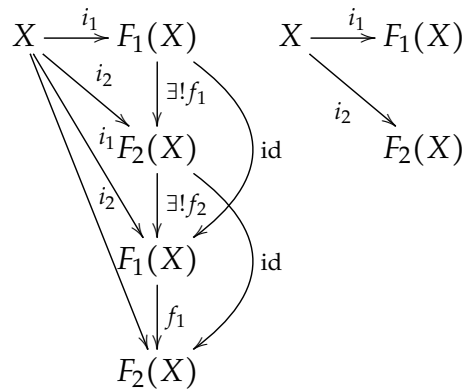
## Freie Gruppe (universelles Problem)

Gegeben sei eine Menge  $M$ . Gesucht ist für eine Abbildung  $i$  und eine Gruppe  $F(M)$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & F(M) \\ & \searrow f & \nearrow \exists! \bar{f} \\ & & G \end{array}$$

sodass für alle Gruppen  $G$  und Abbildungen  $f : M \rightarrow G$  gilt: es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{f} : F(M) \rightarrow G$  mit  $\bar{f} \circ i = f$ .  $F(M)$  heißt die **freie Gruppe**

(über  $M$ ).



seien freie Gruppen über  $X$ ,  $f_1$  ein Gruppenhomomorphismus. Wegen der Eindeutigkeit des Homomorphismus ist

$$\begin{aligned} \text{id}_{F_1(X)} &= f_2 \circ f_1, \\ \text{id}_{F_2(X)} &= f_1 \circ f_2, \\ \implies f_2 &= f_1^{-1} \text{ ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

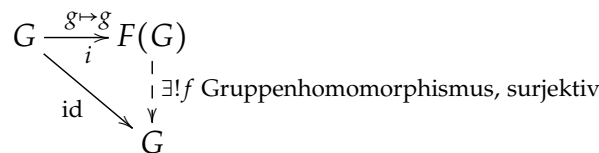
Seien  $w_1, w_2$  Worte,  $\square$  das leere Wort und  $ww^{-1} = w^{-1}w = \square$ . Betrachte alle (formalen) Worte über  $X \cup X^{-1}$ . Betrachte dann die Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von der Relation  $w_1xx^{-1}w_2 \sim w_1w_2$  ( $w_1, w_2$  Wörter,  $x \in X \cup X^{-1}$ ).

Diese Äquivalenzrelation ist mit der Multiplikation verträglich und man erhält damit eine Gruppe mit neutralem Element  $\square$ .

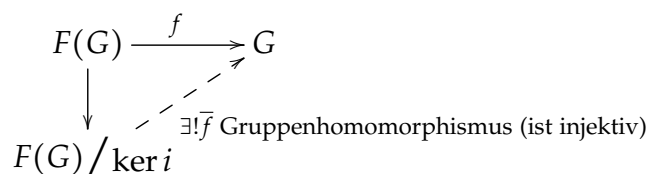
**Alternativ** Normalform: «reduziertes Wort»: Kürze solange es geht direkt nebeneinanderstehende Buchstaben  $xx^{-1}$  (bzw.  $x^{-1}x$ ). Dies liefert immer dasselbe Ergebnis (das reduzierte Wort  $r(w)$ ).

**Proposition** Jede Gruppe ist isomorph zur Faktorgruppe einer freien Gruppe.

**Beweis.** Wähle  $g \mapsto g$  als Wort unter einem Buchstaben

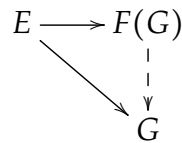


Damit



Wegen  $f$  surjektiv ist  $\bar{f}$  ein Isomorphismus. ■

**Bemerkung**  $E \subseteq G$  Erzeugendensystem reicht:



**Satz (Nielsen, Schreier 1927)** Untergruppen von freien Gruppen sind frei.

**Beispiele** Die von  $\{a^n b a^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  erzeugte Untergruppe von  $F(\{a, b\})$  ist isomorph zu  $F(\mathbb{N}_0)$  (also nicht endlich erzeugt).

**Beweis.** Aufgabe 28 (5 P). ■

**Definition** Eine Darstellung einer Gruppe der Form

$$F(\{a_1, \dots, a_n\}) / \langle w_1, \dots, w_m \rangle, w_1, \dots, w_m \in F(\{a_1, \dots, a_n\}),$$

$\langle \dots \rangle$  erzeugter Normalteiler, heißt eine **endliche Präsentation** der Gruppe.

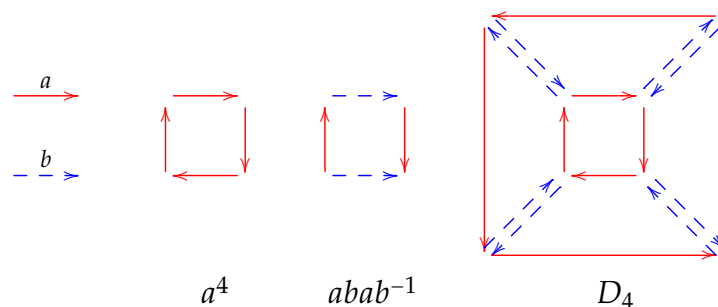
$G$  heißt **endlich präsentierbar**, falls es  $E$  endliche Menge,  $R \subseteq F(E)$  endliche Menge gibt mit  $G \cong F(E) / \langle R \rangle$ .

**Beispiel**  $G = F(a, b) / \langle a^2, b^2 \rangle$

**Cayley-Diagramm** von einer Darstellung der Gruppe durch Erzeugende und Relationen (endliche Präsentationen),  $G = F(E) / \langle R \rangle$ .

Das **Cayley-Diagramm** ist ein einfach (keine Mehrfachkanten) gerichteter Graph, dessen Knoten (Ecken) die Gruppenelemente sind und dessen (gerichtete) Knoten  $(v, va)$  mit  $v \in G$ ,  $a \in E$  Kante von  $v$  nach  $w$ , falls  $w = va$  mit einer Knotenfärbung für jedes Erzeugende  $a \in E$ .

**Beispiel**  $F(a, b) / \langle \{a^n, abab^{-1}, b^2\} \rangle$



$a = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ ,  $b = (1 \ 2)(3 \ 4)$ . Dann ist

$$a^4 = e, b^2 = e, aba = (1, 2)(3, 4) = b, abab^{-1} = e.$$

Konvention bei  $a \in E$  mit  $a^2 \in R$ . Zeichne die Kante mit Farbe  $a$  als ungerichtete Kanten ein.

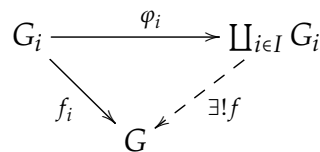
**Beispiel**  $F(a, b) / \langle a^2, b^2 \rangle$   
 $\underline{a}$



$\underline{b}$

**Aufgabe 29 (5 P).** Zeichnen Sie das Cayley-Diagramm von  $F(a, b) / \langle a^5, b^2, (ab)^3 \rangle$ .

**Definition** Seien  $G_i, i \in I$  Gruppen. Das **Coprodukt (freies Produkt)**  $\coprod_{i \in I} G_i$  ist eine Gruppe zusammen mit dem Homomorphismus  $\varphi_i : G_i \rightarrow \coprod_{i \in I} G_i$ , sodass für alle Gruppen  $G$  und Gruppenhomomorphismen  $f_i : G_i \rightarrow G$  genau ein Homomorphismus  $f : \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow G$  existiert mit  $f \circ \varphi_i = f_i$  für alle  $i \in I$ .



Die Eindeutigkeit folgt analog wie am Ende des Abschnittes zur freien Gruppe.

**Satz (Konstruktion des Coprodukts)** Sei  $G_i = F(M_i) / \langle R_i \rangle$ ,  $M_i$  paarweise disjunkte Mengen,  $R_i \subseteq F(M_i)$ . Dann ist  $F\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) / \left\langle \bigcup_{i \in I} R_i \right\rangle$  mit  $\varphi_i([w]) = [w]$ .

**Leicht zu zeigen**  $\varphi_i$  ist wohldefiniert und Gruppenhomomorphismus. Sei  $G$  eine Gruppe und  $f_i : G_i \rightarrow G$  Gruppenhomomorphismus. Sei  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Sei  $j : M \rightarrow G$  die durch  $j(x) := f_i \circ \text{nat} \circ \varphi_i(x)$ , falls  $x \in M_i$ , definierte Abbildung (beachte  $M = \bigcup M_i$ , deshalb wohldefiniert und total definiert). ■

**Bemerkung** Das «Wortproblem» für endlich präsentierte Gruppen ist nicht entscheidbar. Es gibt eine endlich präsentierte Gruppen mit nicht entscheidbarem Wortproblem.

### 3 Simpliziale Komplexe

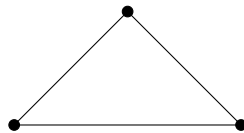
**Definition** Eine Menge  $M$  heißt **affin unabhängig**, wenn aus  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in M$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  folgt, dass  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**Bemerkung**  $M$  ist affin unabhängig  $\iff \{x - x_0 \mid x \in M \setminus \{x_0\}\}$  linear unabhängig ist.

**Definition** Seien  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ , dann heißt

$$\text{konv}\{x_0, \dots, x_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \right\}$$

die **konvexe Hülle** von  $\{x_0, \dots, x_k\}$ . Sie ist die kleinste konvexe Menge, die  $\{x_0, \dots, x_k\}$  enthält. Die konvexe Hülle von  $k+1$  affin unabhängigen Punkten heißt ein  **$k$ -Simplex** und  $k$  heißt **Dimension** des Simplexes. Die  $x_i$  heißen die **Ecken**.



2-Simplex



0-Simplex

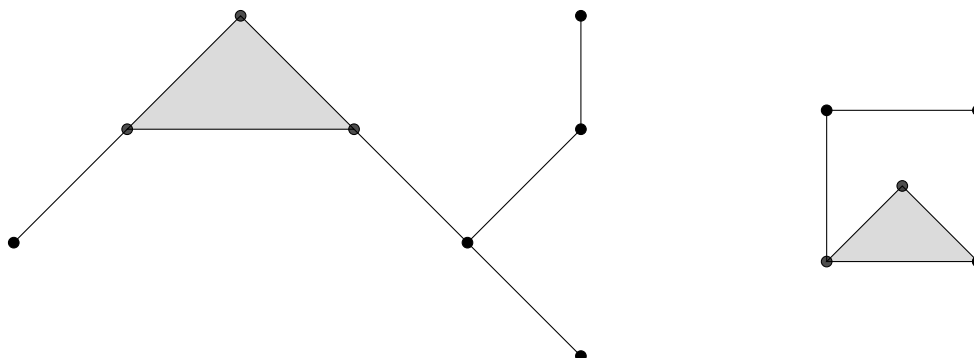
Die konvexe Hülle einer  $m$ -elementigen Teilmenge von  $\{x_0, \dots, x_k\}$  heißt  **$(m-1)$ -Seite** des Simplexes. Falls  $0 < m < k+1$  heißt die Seite **eigentliche Seite** (also  $\emptyset$  ist eine  $(-1)$ -Seite, die 0-Seiten sind genau die Ecken).

Eine Seite eines Simplexes ist wieder ein Simplex.

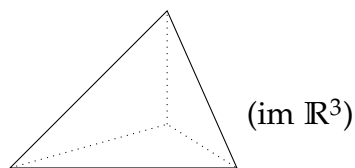
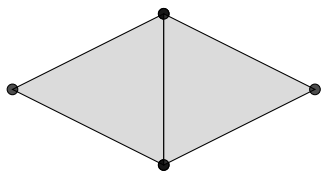
**Bemerkung** Ein **(geometrischer) simplizialer Komplex** ist eine endliche Menge  $\mathcal{K}$  von Simplizes im  $\mathbb{R}^n$ , sodass gilt:

- (1) Der Durchschnitt von je zwei Simplizes aus  $\mathcal{K}$  ist eine gemeinsame Seite.
- (2) Jede Seite eines Simplexes aus  $\mathcal{K}$  ist in  $\mathcal{K}$  (also insbesondere  $\emptyset$ ).

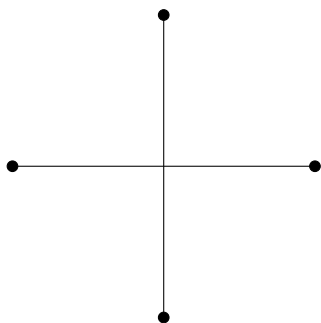
**Beispiele** Simpliziale Komplexe



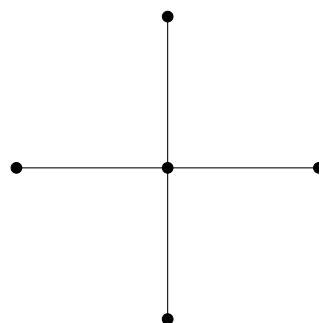




Hingegen ist

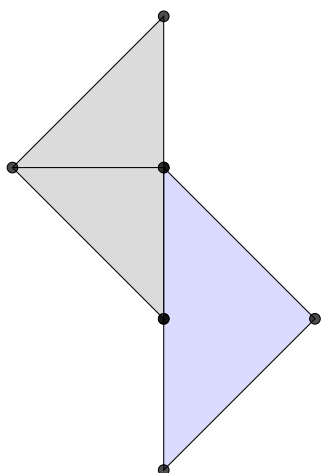


kein simplizialer Komplex<sup>1</sup>,

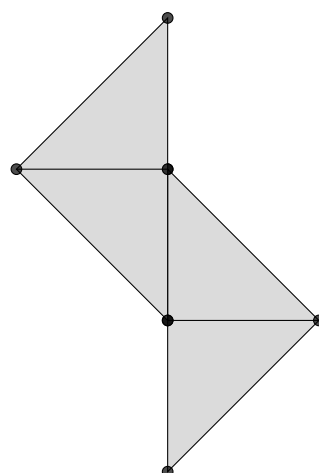


ein simplizialer Komplex,

und



kein simplizialer Komplex<sup>2</sup>,



ein simplizialer Komplex.

**Definition**  $|\mathcal{K}|$  bezeichne die Vereinigung der Simplizes von  $\mathcal{K}$ , also  $|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}$ .  $|\mathcal{K}|$  heißt der **Träger** oder das zu  $\mathcal{K}$  gehörige **Polyeder**.

Wir betrachten  $|\mathcal{K}|$  mit der Unterraumtopologie des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **triangulierbar**, falls es einen simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$  gibt, dessen Träger homöomorph zu  $X$  ist, also  $X \cong |\mathcal{K}|$ .

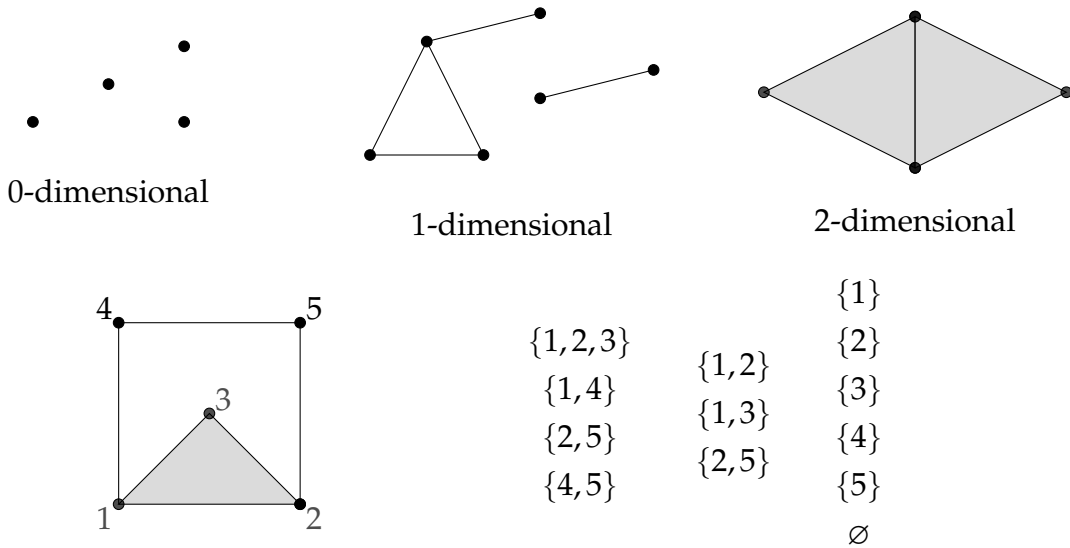
$(\mathcal{K}, \varphi)$  heißt dann eine **Triangulierung von  $X$** , wobei  $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow X$  ein Homöomorphismus ist.

Die **Dimension** von  $\mathcal{K}$  ist das Maximum der Dimensionen der Simplizes von  $\mathcal{K}$ .

<sup>1</sup>Ursprung-«Verbindung» fehlt!

<sup>2</sup>blau gekennzeichnete Fläche ist ein Viereck!

Beispiele



**Definition** Ein (abstrakter) **simplizialer Komplex** ist eine endliche Menge  $E$  zusammen mit einer Menge  $S \subseteq \mathcal{P}(E)$ , sodass  $A \subseteq B$  und  $B \in S$  folgt  $A \in S$  und  $\cup S = E$ . Die **Dimension** von  $(E, S) := \max\{\text{card } A \mid A \in S\} - 1$ .

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein geometrischer simplizialer Komplex,  $E$  die Eckenmenge von  $\mathcal{K}$ . Sei

$$S := \{A \subseteq E \mid \text{konv } A \in \mathcal{K}\}.$$

Dann ist  $(E, S)$  ein abstrakter simplizialer Komplex. Er heißt der **zu  $\mathcal{K}$  gehörige abstrakte simpliziale Komplex**.

**Definition** Zwei (abstrakte) simpliziale Komplexe  $(E_1, S_1), (E_2, S_2)$  heißen **kombinatorisch isomorph**, falls es eine bijektive Abbildung  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  gibt mit  $\varphi[S_1] = S_2$ ,  $\varphi[S_1] = \{\varphi(A) \mid A \in S_1\}$ .

**Definition** Für  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex definiere das **relative Innere von  $M$**  relint  $M$  als das Innere bzgl. der offenen Hülle  $\text{aff } M$  von  $M$ .

**Beispiel**  $\text{relint}(\bullet \text{---} \bullet)$  ist die Strecke ohne die Endpunkte (egal in welchen  $\mathbb{R}^n$  sie liegt).  $\text{relint}(\bullet)$  ist der Punkt.

**Definition** Eine **Realisierung** eines abstrakten simplizialen Komplexes  $(E, S)$  ist eine injektive Abbildung  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\{\text{konv } \varphi(M) \mid M \in S\}$  ein geometrischer simplizialer Komplex ist.

**Definition und Feststellung 3.0** (a) Die Ecken eines Simplexes  $G$  sind genau die Punkte die nicht im relativen Inneren einer in  $G$  liegenden Strecke liegen, sind also durch  $G$  eindeutig bestimmt.

- (b) Die **natürliche Realisierung** eines abstrakten simplizialen Komplexes  $(\{a_1, \dots, a_n\}, S)$  ist gegeben durch die Abbildung  $\varphi : \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(a_i) = e_i$  ( $i$ -ter Standardbasisvektor).

**Satz 3.1** Ein  $n$ -dimensionaler abstrakter simplizialer Komplex  $(E, S)$  hat eine Realisierung in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Beweis.** Sei  $E = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Wir wählen  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  injektiv, sodass für die  $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)\}$  in **allgemeiner Lage** liegen, d.h. so, dass je  $2n+2$  affin unabhängig sind bzw.  $\varphi(E)$  affin unabhängig ist, falls  $k < 2n+2$ . Dies kann man erreichen durch

$$\varphi(a_r) = X_r := (r, r^2, \dots, r^{2n+1}) \quad (1 \leq r \leq k).$$

Angenommen  $\{X_{r_1}, \dots, X_{r_{2n+2}}\}$  wäre affin abhängig. Dann gäbe es  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+2} \in \mathbb{R}$ , nicht alle gleich 0 mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_{2n+2} &= 0 \\ \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_{2n+2} r_{2n+2} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 r_1^{2n+1} + \dots + \lambda_{2n+2} r_{2n+2}^{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \dots & r_{2n+2} \\ r_1^2 & \dots & r_{2n+2}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{2n+1} & \dots & r_{2n+2}^{2n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (r_i - r_j) \neq 0,$$

also hat das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung, also sind  $X_{r_1}, \dots, X_{r_{2n+2}}$  affin unabhängig und damit  $X_1, \dots, X_k$  in allgemeiner Lage.

Wir definieren  $\mathcal{K} = \{\text{konv } \varphi(A) \mid A \in S\}$ .  $\mathcal{K}$  erfüllt offensichtlich die Bedingung (Seiten von Simplizes in  $\mathcal{K}$  sind in  $\mathcal{K}$ ).

Seien  $\sigma_p, \tau_q$   $p$  bzw.  $q$ -dimensionale Simplizes in  $\mathcal{K}$  und sei  $r$  die Zahl der gemeinsamen Ecken. Dann ist die Zahl der Ecken, die  $\sigma_p$  oder  $\tau_q$  sind  $p+q+2-r \leq 2n+2$ , also sind die Ecken affin unabhängig und können als Ecken eines  $(p+q-r+1)$ -Simplexes gewählt werden, welches  $\sigma_p$  und  $\tau_q$  als Seiten enthält. Also ist  $\sigma_p \cap \tau_q$  eine gemeinsame Seite. ■

**Bemerkung** Man kann zeigen, dass für  $n \geq 0$  die Dimension  $2n+1$  bestmöglich ist, nämlich z. B. für  $\text{card } E = 2n+3$ ,  $S =$  Menge der höchstens  $(n+1)$ -elementigen Teilmengen ist  $(E, S)$  ein  $n$ -dimensionaler simplizialer Komplex, der **nicht** in den  $\mathbb{R}^{2n}$  einbettbar ist.

Für einen gegebenen simplizialen Komplex kann die kleinste Einbettungsdimension kleiner sein.

**Definition** Ein **Unterkomplex** eines simplizialen Komplexes  $\mathcal{K}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ , die die Bedingung (2) erfüllt (nämlich Seiten von Simplizes von  $\mathcal{L}$  gehören zu  $\mathcal{L}$ ). Das  $r$ -**Skelett**  $\text{Sk}_r(\mathcal{K})$  ist die Menge der höchstens  $r$ -dimensionalen Simplizes in  $\mathcal{K}$ .  $\text{Sk}_r(\mathcal{K})$  ist offenbar ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ .

Ein **simpliziales Paar**  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  besteht aus einem simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$  und einem Unterkomplex  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{K}$ .

**Beispiel** Sei  $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$  ein  $n$ -Simplex.  $\{\sigma_n\}$  ist **kein** simplizialer Komplex, aber  $K(\sigma_n) :=$  Menge aller Seiten von  $\sigma_n$  ist ein simplizialer Komplex.

$\text{Sk}_{n-1}(K(\sigma_n)) = K(\sigma_n) \setminus \{\sigma_n\}$  heißt der **Randkomplex** von  $\sigma_n$ . Für ein  $n$ -Simplex  $\sigma_n$  gilt

$$\text{relint}\sigma_n = \sigma_n \setminus |\text{Sk}_{n-1}(K(\sigma_n))|.$$

**Proposition 3.2** Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar in  $\mathbb{R}^m$ .

- (a)  $|\mathcal{K}|$  ist eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$
- (b)  $|\mathcal{L}|$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{K}$ .
- (c) Falls  $\mathcal{M}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$  ist, dann sind auch  $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  und  $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$  Unterkomplexe von  $\mathcal{K}$ .
- (d) Eine Teilmenge  $X \subseteq |\mathcal{K}|$  ist genau dann abgeschlossen, wenn die Vereinigung der Simplexe  $X \cap \sigma$  für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$  abgeschlossen ist.
- (e) Ein Simplex  $\sigma_n \subseteq \mathbb{R}^m$  ist eine kompakte wegzusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Ein Simplex hat eindeutig bestimmte  $k$ -Seiten.
- (f) Jeder Punkt von  $|\mathcal{K}|$  ist im relativen Inneren genau eines Simplexes von  $\mathcal{K}$ .

**Beweis.** Klar (bzw. einfach). ■

**Definition** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe. Eine **simpliziale Abbildung**  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  ist eine Abbildung, für die gilt:

- (a) Falls  $\text{konv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$ , dann ist  $\text{konv}\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{L}$ .
- (b) Falls  $\text{konv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$ , dann gilt für  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ :

$$f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i),$$

d.h.  $f$  ist «linear» (genauer affin) auf jedem Simplex.

**Bemerkung** Nach (a) werden Ecken auf Ecken abgebildet. Eine simpliziale Abbildung ist durch ihre Einschränkung auf die Eckenmenge von  $\mathcal{K}$  eindeutig bestimmt (wegen (b)).

**Definition** Eine simpliziale Abbildung von simplizialen Paaren  $f : (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ist eine simpliziale Abbildung  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{M}|$  mit  $f(|\mathcal{L}|) \subseteq |\mathcal{N}|$ .

Es ist klar, dass die Komposition von simplizialen Abbildung wieder eine simpliziale Abbildung ist.

**Proposition 3.3** Eine simpliziale Abbildung  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  ist stetig.

**Beweis.** Wenn  $X \subseteq |\mathcal{L}|$  abgeschlossen ist, dann ist  $X \cap \tau$  abgeschlossen für alle  $\tau \in \mathcal{L}$ . Aber  $f|_{\sigma}$  ist stetig für  $\sigma \in \mathcal{K}$ , also  $f^{-1}(x) \cap \sigma$  abgeschlossen in  $\sigma$  für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$ , also ist  $f^{-1}(X)$  abgeschlossen ( $\rightarrow$  Proposition 3.2 d)). ■

**Definition** Seien  $(E_1, \mathcal{K}_1), (E_2, \mathcal{K}_2)$  abstrakte simpliziale Komplexe. Eine **(abstrakte) simpliziale Abbildung** ist eine Abbildung  $f : E_1 \rightarrow E_2$  mit  $f(\sigma) \in \mathcal{K}_2$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}_1$ .

**Satz 3.4** Seien  $(E_1, \mathcal{K}_1), (E_2, \mathcal{K}_2)$  zwei abstrakte simpliziale Komplexe. Sei  $f : E_1 \rightarrow E_2$  eine abstrakte simpliziale Abbildung. Seien  $\varphi_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  Realisierungen von  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  mit geometrischem simplizialen Komplexen  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  bzw.  $\tilde{\mathcal{K}}_2$ .

- (a) Dann gibt es eine eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung  $\tilde{f} : |\tilde{\mathcal{K}}_1| \rightarrow |\tilde{\mathcal{K}}_2|$  mit  $\tilde{f}(\varphi_1(e)) = \varphi_2(f(e))$  für alle  $e \in E_1$ .
- (b) Falls  $f$  injektiv ist, dann ist  $\tilde{f}$  eine Einbettung ( $f|_{\sigma}$  ist ein Isomorphismus).
- (c) Falls  $f$  ein kombinatorischer Isomorphismus ist, dann ist  $\tilde{f}$  ein Homomöorphismus.
- (d) Falls  $(E_3, \mathcal{K}_3)$  auch ein abstrakter simplizialer Komplex ist und  $\varphi_3 : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Realisierung mit  $\tilde{\mathcal{K}}_3$  und  $g : E_2 \rightarrow E_3$  eine abstrakte simpliziale Abbildung ist, dann ist  $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{f \circ g}$ .

**Beweis.** (a) Klar mit Proposition 3.1 und der eindeutigen Fortsetzbarkeit einer Abbildung von der Eckenmenge eines Simplexes zu einer affinen Abbildung auf dem Simplex.

(d) Klar wegen der Eindeutigkeit.

(c)  $f$  und  $f^{-1}$  sind abstrakte simpliziale Abbildungen. Wegen (d) ist

$$\begin{aligned} \tilde{f} \circ \widetilde{f^{-1}} &\stackrel{(d)}{=} \widetilde{\text{id}_{\mathcal{K}_1}} = \text{id}_{\mathcal{K}_2} \\ \widetilde{f^{-1}} \circ \tilde{f} &= \text{id}_{\mathcal{K}_1}, \end{aligned}$$

also  $\widetilde{f^{-1}} = (\tilde{f})^{-1}, \tilde{f}, \widetilde{f^{-1}}$  sind stetig.

(b)  $f|_{\sigma} : (E_1, \mathcal{K}_1) \rightarrow (f(E_1), \{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{K}_1\})$  ist ein kombinatorischer Isomorphismus ( $f$  nach Voraussetzung injektiv!).  $f = i \circ f|_{\sigma}$ , mit  $i : (f(E_1), \{f(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{K}_1\}) \rightarrow (E_2, \mathcal{K}_2)$  die Inklusionsabbildung.  $\tilde{f}$  ist eine Einbettung. Nun folgt die Behauptung aus (d) und (c). ■

**Bemerkung** Sei  $E$  eine endliche Menge,  $S \subseteq \mathcal{P}(E)$  mit  $\cup S = E$ . Dann ist durch

$$\mathcal{K} := \{\sigma \mid \exists M \in S : \sigma \subseteq M\}$$

ein abstrakter simplizialer Komplex gegeben.

**Definition** Der **Join** von zwei abstrakten simplizialen Komplexen  $(E_1, \mathcal{K}_1), (E_2, \mathcal{K}_2)$  mit  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  ist definiert durch

$$(E_1, \mathcal{K}_1) * (E_2, \mathcal{K}_2) := (E_1 \cup E_2, \{\sigma \subseteq E_1 \cup E_2 \mid \sigma \cap E_1 \in \mathcal{K}_1, \sigma \cap E_2 \in \mathcal{K}_2\}).$$

Es ist klar, dass dies ein abstrakter simplizialer Komplex ist. Es gilt

$$\dim(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) = \dim \mathcal{K}_1 + \dim \mathcal{K}_2 + 1.$$

Ferner gilt

$$(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2) * \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 * (\mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_3)$$

$$\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_1.$$

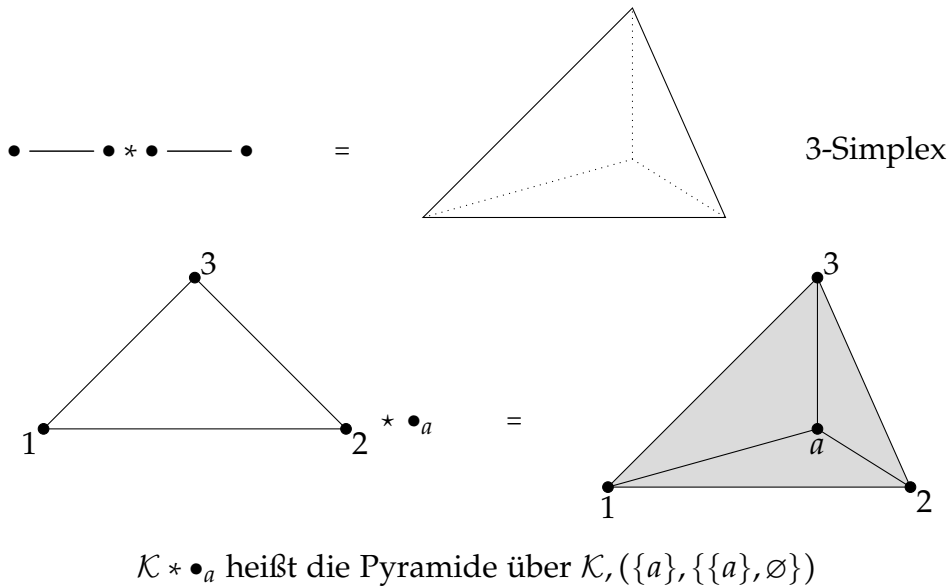
Seien  $\varphi_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\varphi_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  geometrische Realisierungen der abstrakten simplizialen Komplexe  $(E_1, \mathcal{K}_1)$  bzw.  $(E_2, \mathcal{K}_2)$ . Sei  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Zeige, dass  $\varphi : E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$  mit

$$\varphi(e) := \begin{cases} (\varphi_1(e_1), 0, 0) & e_1 \in E_1 \\ (0, \varphi_2(e_2), 1) & e_2 \in E_2 \end{cases}$$

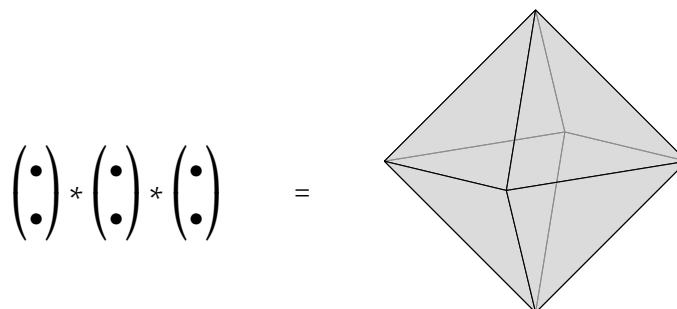
eine geometrische Realisierung von  $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$  ist.

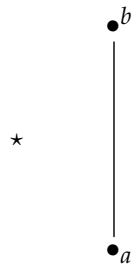
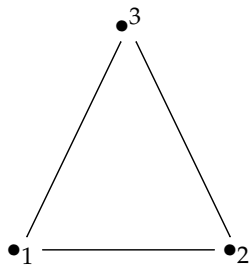
**Beweis.** Aufgabe 30 (3 P). ■

Zum Beispiel



$\mathcal{K} * \bullet_a * \bullet_b$  Einhängung von  $\mathcal{K}$



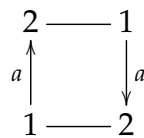


Komplex aus drei Tetraedern

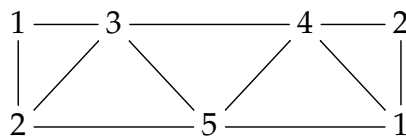
$\{1, 2, a, b\}, \{1, 3, a, b\}, \{2, 3, a, b\}$

und allen Seiten davon.

**Beispiele für 2-dimensionale simpliziale Komplexe und Aufgaben (1) Möbiusband**



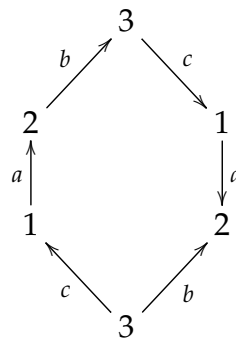
Triangulierung



**Aufgabe 31 (2 P).** Man gebe eine Realisierung dieser Triangulierung im  $\mathbb{R}^3$  an (oder bauen ein Modell (aus Pappe)).

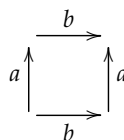
(2) projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2$

**Aufgabe 32 (3 P).** Man finde eine Triangulierung mit 6 Ecken. Hinweis:

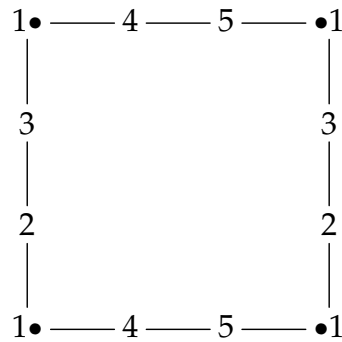


Zeige, dass das triangulierte Möbiusband aus 1) in diesen simplizialen Komplex eingebettet werden kann.

(3) Der Torus  $S^1 \times S^1$



**Aufgabe 33 (5 P).** Man finde eine Triangulierung mit 7 Ecken. Hinweis:



soll auf das Innere des Quadrats forgesetzt werden.

**Satz und Definition** Bezeichne  $f_i$  die Anzahl der  $i$ -Seiten eines  $n$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\mathcal{K}$ . Dann heißt

$$\chi(\mathcal{K}) := \sum_{i=0}^n (-1)^i f_i$$

die **Euler-Charakteristik von  $\mathcal{K}$** .  $\chi$  ist eine topologische Invariante, d.h.

$$|\mathcal{K}_1| \cong |\mathcal{K}_2| \implies \chi(\mathcal{K}_1) = \chi(\mathcal{K}_2).$$

**Aufgabe 34 (4 P).** Beweise, dass für eine 2-dimensionale simpliziale Mannigfaltigkeit gilt:

$$f_0 \geq \left\lceil \frac{1}{2} (7 + \sqrt{49 - 24\chi}) \right\rceil$$



## 4 Simpliziale Approximation

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Für  $x \in |\mathcal{K}|$  bzw. für ein  $\tau \in \mathcal{K}$  definiere

$$\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \sigma \text{ ist Seite eines } \tau \in \mathcal{K} \text{ mit } x \in \tau\}$$

$$\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathcal{K} \mid \exists \rho \in \mathcal{K} : \tau \subseteq \rho \text{ mit } \sigma \subseteq \rho\}$$

= die Menge der Simplizes in  $\mathcal{K}$ , die  $\tau$  als Seite enthalten, sowie aller ihrer Seiten

heißt die **simpliziale Umgebung von  $x$  bzw.  $\tau$** .

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x) := \{\sigma \in \mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x) \mid x \notin \sigma\}$$

$$\text{Lk}_{\mathcal{K}}(\tau) := \{\sigma \in \mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$$

heißt der **Link von  $x$  bzw.  $\tau$** .

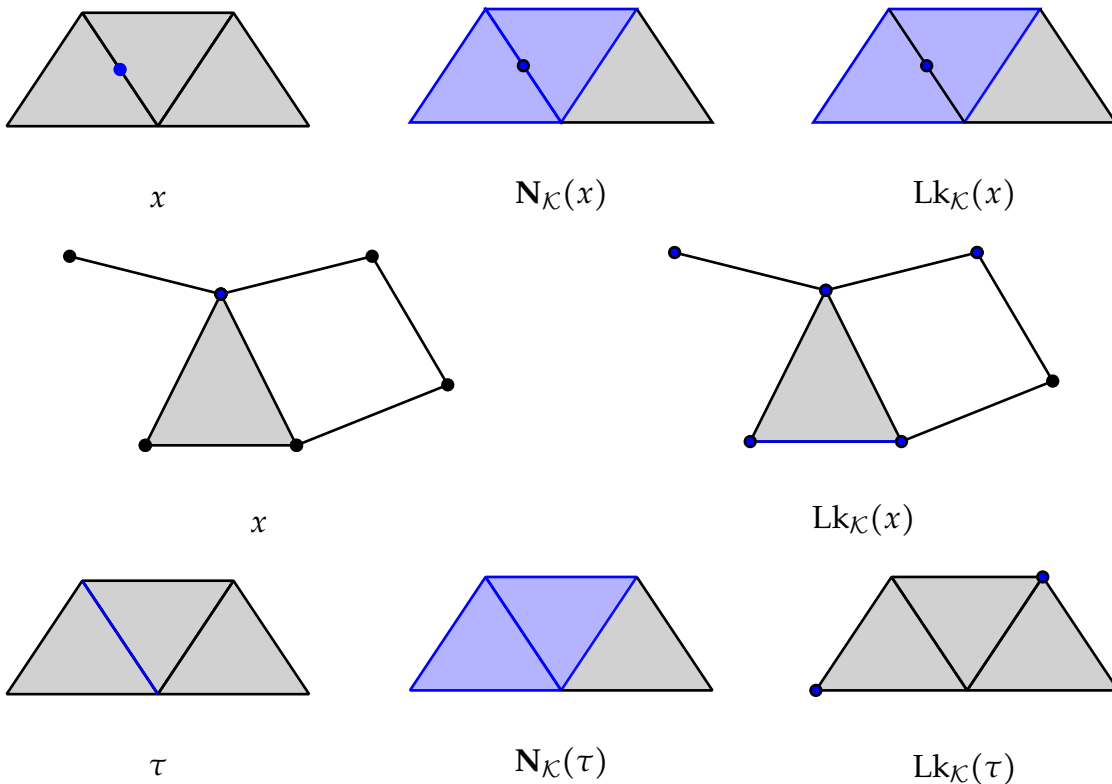
$$\text{St}_{\mathcal{K}}(x) := |\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(x)| \setminus |\text{Lk}_{\mathcal{K}}(x)| = \text{St}_{\mathcal{K}}(\tau),$$

wobei  $x \in \text{relint } \tau$  heißt der **Stern von  $x$  bzw.  $\tau$** .

$\text{St}_{\mathcal{K}}$  hängt offensichtlich nicht von der Auswahl von  $x \in \text{relint } \tau$  ab.

**Achtung** In der Literatur wird auch gelegentlich  $\mathbf{N}_{\mathcal{K}}(\tau)$  als Stern von  $\tau$  bezeichnet. Der Index  $\mathcal{K}$  wird weggelassen, wenn klar ist, auf welchen simplizialen Komplex sich die Bezeichnung bezieht.

### Beispiele



**Proposition 4.1** (a)  $|\mathbf{N}(x)|$  ist sternförmig bzgl.  $x$ , d.h. für alle  $y \in |\mathbf{N}(x)|$  liegt die Strecke  $xy$  in  $|\mathbf{N}(x)|$ .

(b) Jeder von  $x$  ausgehende Strahl  $l \subseteq \mathbb{R}^4$  mit  $l \cap |\mathbf{N}(x)| \neq \{x\}$  trifft  $|\text{Lk}(x)|$  in genau einem Punkt.

**Beweis.** (a) Falls  $y \in |\mathbf{N}(x)|$ , dann gibt es  $\tau \in \mathcal{K}$  mit  $x \in \tau$ .  $\tau$  ist konvex, also liegt die Strecke  $xy$  in  $\tau$  und somit in  $|\mathbf{N}(x)|$

(b) Aufgabe 35 (3 P). ■

**Definition** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  simpliziale Komplexe,  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Dann heißt eine simpliziale Abbildung  $g : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  eine **simpliziale Approximation von  $f$** , falls für jede Ecke  $a$  von  $\mathcal{K}$  gilt:  $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$ .

**Bemerkung** Falls  $f$  simplizial ist, dann ist  $g = f$  eine simpliziale Approximation von  $f$ , denn dann bildet  $f$  das Simplex, das  $a$  als Ecke hat auf ein Simplex in  $\mathcal{L}$  ab, das  $f(a)$  als Ecke hat, also  $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(f(a))$  für alle Ecken  $a$  in  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 4.2** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe,  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Falls  $g$  eine Abbildung von der Menge der Ecken in  $\mathcal{K}$  in die Menge der Ecken von  $\mathcal{L}$  ist, mit  $f(\text{St}_{\mathcal{K}}(a)) \subseteq \text{St}_{\mathcal{L}}(g(a))$ , dann gibt es eine eindeutige bestimmte simpliziale Abbildung  $\bar{g} : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ , die  $g$  fortsetzt und  $\bar{g}$  ist eine simpliziale Approximation von  $f$ .

**Beweis.** Zu zeigen:  $\text{conv}\{g(a_0), \dots, g(a_n)\} \in \mathcal{L}$ , falls  $\text{conv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$ . Dann lässt sich  $g$  eindeutig zu einer simplizialen Approximation  $\bar{g}$  auf  $\mathcal{K}$  fortsetzen und  $\bar{g}$  ist nach Definition eine simpliziale Approximation.

Sei  $x \in \text{relint conv}\{a_0, \dots, a_n\}$ . Dann ist

$$x \in \text{St}(a_0) \cap \dots \cap \text{St}(a_n)$$

$$\implies f(x) \in f(\text{St}(a_0)) \cap \dots \cap f(\text{St}(a_i)) \cap \dots \cap f(\text{St}(a_n)) \subseteq \text{St}(g(a_0)) \cap \dots \cap \text{St}(g(a_n)),$$

also gilt für  $i = 0, \dots, n$   $g(a_i)$  ist eine Ecke des eindeutig bestimmten Simplexes  $\sigma \in \mathcal{L}$  mit  $f(x) \in \text{relint } \sigma$ . Also ist  $\text{conv}\{g(a_0), \dots, g(a_n)\}$  eine Seite von  $\sigma \in \mathcal{L}$ . ■

**Satz 4.3** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe,  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Sei  $g$  eine simpliziale Approximation von  $f$ . Dann gilt  $f \simeq g$ . Es gilt sogar  $f \simeq g \text{ rel } \{x \in |\mathcal{K}| \mid f(x) = g(x)\}$ .

**Beweis.** Sei  $x \in |\mathcal{K}|$ ,  $x \in \text{relint } \sigma$ ,  $\sigma = \text{conv}\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$ . Dann ist  $f(x)$  in einem Simplex  $\tau \in \mathcal{L}$ , das  $g(a_0), \dots, g(a_n)$  als Ecken (und möglicherweise weitere) hat (vgl. Beweis von 4.2), also  $g(x) \in \tau$ , also liegt die Verbindungsstrecke von  $f(x)$  und  $g(x)$  ganz in  $\tau \subseteq |\mathcal{L}|$ , also  $f \simeq g$  (nach Lemma 2.3 mit  $F(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x)$ ), also  $f \simeq g \text{ rel } \{x \in |\mathcal{K}| \mid f(x) = g(x)\}$ . ■

Also approximiert die simpliziale Approximation «bis auf Homotopie».

**Beispiel** (1)  $\text{St}(a_1) = (a_0, a_2)$  offenes Intervall.

$$f(\text{St}(a_0)) \subseteq \text{St}(b_0) \cap \text{St}(b_2)$$

$$f(\text{St}(a_1)) \subseteq \text{St}(b_2)$$

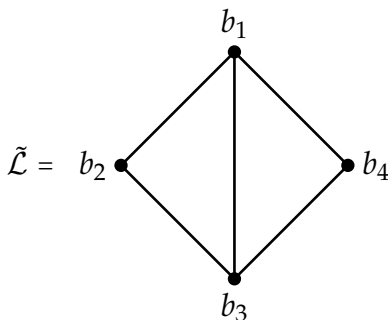
$$f(\text{St}(a_2)) \subseteq \text{St}(b_1)$$

$$f(\text{St}(a_3)) \subseteq \text{St}(b_1) \cap \text{St}(b_3)$$

Also simpliziale Approximation  $g$ , wenn  $g(a_0) \in \{b_0, b_2\}$ ,  $g(a_1) = b_2$ ,  $g(a_2) = b_1$ ,  $g(a_3) \in \{b_1, b_3\}$ . Dies Beispiel zeigt, dass es verschiedene simpliziale Approximationen gibt.

(2) Sei  $\tilde{\mathcal{K}} = \bullet \text{---} \bullet$ , also  $|\mathcal{K}| = |\tilde{\mathcal{K}}|$ ,  $f, \mathcal{L}$  wie vorher. Dann ist  $f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0))$  in keinem Eckstern von  $\mathcal{L}$  enthalten, d.h. es gibt **keine** simpliziale Approximation (bzgl.  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ ).

(3) Seien  $\tilde{\mathcal{K}}, f$  wie in 2),



Dann ist  $f(\text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(a_0)) \subseteq \text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(b_1) \cap \text{St}_{\tilde{\mathcal{K}}}(b_3)$ , also gibt es wieder eine simpliziale Approximation bzgl.  $\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{L}}$ .

(2) und (3) zeigen, dass die Existenz einer simplizialen Abbildung von  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  (bzgl.  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ ) stark von  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  selbst anhängt (und nicht von  $|\mathcal{K}|, |\mathcal{L}|$ ). Dabei vergrößert eine «feinere Unterteilung» von  $\mathcal{K}$  die Möglichkeiten einer simplizialen Approximation. Eine feinere Unterteilung von  $\mathcal{L}$  reduziert die Möglichkeiten.

**Idee** Lasse  $\mathcal{L}$  fest und «verfeinere» die Unterteilung von  $\mathcal{K}$  in Simplexes solange bis (hoffentlich) eine simpliziale Approximation von  $f$  existiert.

Zu präzisieren, was «verfeinern» heißt:

**Definition** Der **Schwerpunkt** eines Simplexes  $\sigma = \text{konv}\{a_0, \dots, a_n\}$  ( $a_0, \dots, a_n$  affin unabhängig) ist

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i \quad (\text{für } \sigma \neq \emptyset)$$

Offenbar ist  $\hat{\sigma} \in \text{relint } \sigma$ .

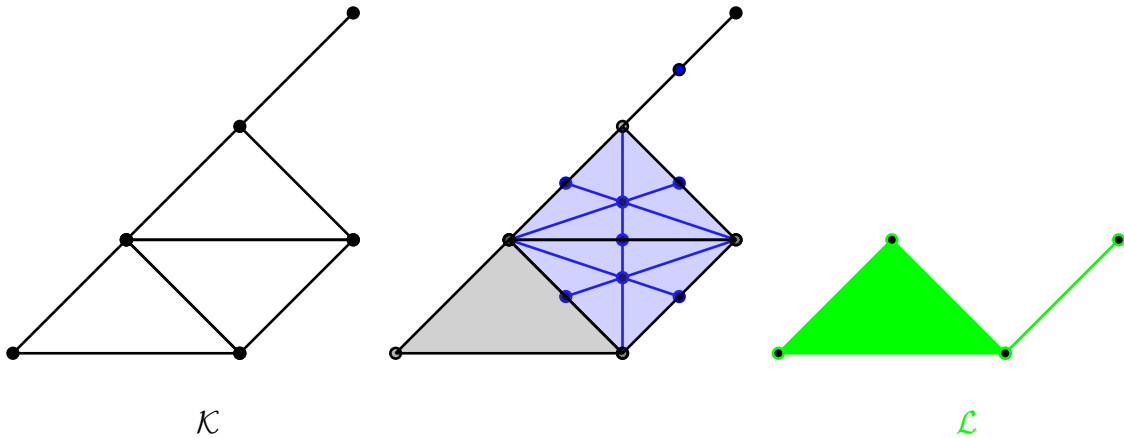
Wir wollen uns die Möglichkeit vorbehalten einen Teil von  $\mathcal{K}$  unverändert zu lassen und gehen deshalb von einem simplizialen Paar  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  aus (also  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ ).

**Definition** Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  ein simpliziales Paar. Dann ist die **baryzentrische Unterteilung von  $\mathcal{K}$  relativ zu  $\mathcal{L}$**  oder der **abgeleitete Komplex  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$**  folgendermaßen definiert:

$$(\mathcal{K}, \mathcal{L})' := \left\{ \text{konv}\{a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m\} \mid \text{konv}\{a_0, \dots, a_k\} \in \mathcal{L}, k, m \geq -1, \sigma_0, \dots, \sigma_m \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \right. \\ \left. \sigma_m \not\supseteq \sigma_{m-1} \not\supseteq \dots \not\supseteq \sigma_0 \not\supseteq \text{konv}\{a_0, \dots, a_k\} \right\}$$

**Bezeichnung** Falls  $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ , schreibe  $\mathcal{K}'$  für  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$

**Beispiel**



**Proposition 4.4**  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  ist ein simplizialer Komplex, der  $\mathcal{L}$  als Unterkomplex enthält und  $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}|$ .

**Beweis.** Die Ecken von  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  sind alle Ecken von  $\mathcal{L}$  und alle Ecken der Form  $\hat{\sigma}$  mit  $\sigma \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ . Nach Definition ist klar, dass Seiten von Simplexes in  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  wieder in  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  sind.  $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| \subseteq |\mathcal{K}|$  klar. ■

Dass  $|(\mathcal{K}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}|$  und dass der Durchschnitt von Simplexes aus  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})'$  eine gemeinsame Seite ist, wird induktiv nach der Dimension  $n$   $\mathcal{K}$  bewiesen: Betrachte das  $r$ -Skelett von  $\mathcal{K}$  ( $K^r := \text{Sk}_r(\mathcal{K})$ ), betrachte weiter  $K^r \cup \mathcal{L}$ . Sei  $n = \dim \mathcal{K}$ ,  $r \leq n$ . Wir beweisen

- Lemma 4.5** (a)  $(K^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  ist ein simplizialer Komplex, der  $\mathcal{L}$  als Unterkomplex enthält.  
 (b)  $|(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'| = |\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}|$   
 (c) Jedes Simplex von  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  ist in einem Simplex von  $\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}$  enthalten.  
 (d) Falls  $\mathcal{N}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}^r$  ist, dann gilt  $(\mathcal{N}, \mathcal{N} \cap \mathcal{L})'$  ist ein Unterkomplex von  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ .

**Beweis.** (c) Klar, denn  $\text{konv}\{a_0, \dots, a_k, \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m\} \subseteq \sigma_m$ .

(d) Klar.

(a) Vollständige Induktion nach  $r$ : Für  $r = -1$  Klar,  $\mathcal{K}^{-1} = \{\emptyset\}$ ,  $(\mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{L}$  für  $r = 0$  klar.  $(\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})' = \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{L}$ .  $\mathcal{L}$  Unterkomplex von  $(\mathcal{K}^r \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$  ist klar.

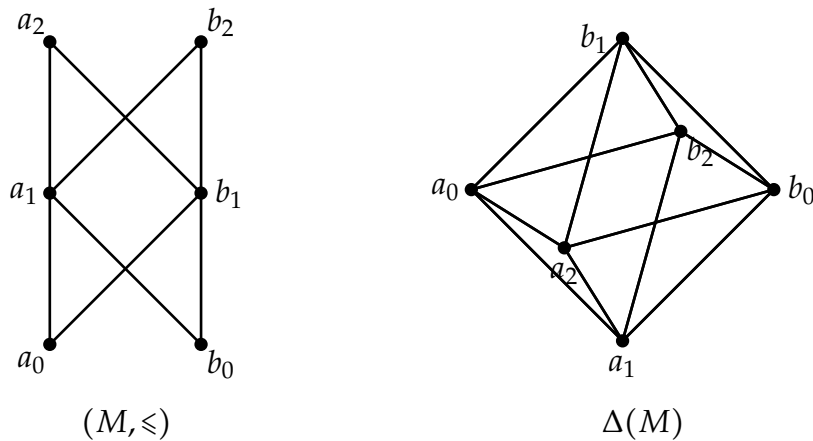
Für den Schnitt von Simplexes gibt es drei Fälle:

- (i)  $\xi \in (\mathcal{K}^{r-1} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})'$ ,  $\eta$  von der Form  $\text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau) = \eta \subseteq \sigma$ ,  $\tau \in (\mathcal{K}^{r-1} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L})$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}^r \setminus \mathcal{K}^{r-1}$ . Dann ist  $\xi \cap \eta = \xi \cap \tau$  (denn  $\xi \cap \sigma \subseteq \tau$  wegen  $\sigma \notin \mathcal{K}^{r-1}$ ) und  $\xi \cap \tau$  ist nach Induktionsannahme eine gemeinsame Seite.
  - (ii) Falls  $\xi, \eta$  von der Form  $\xi = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$ ,  $\eta = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \mu)$ , dann ist  $\xi \cap \eta = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup (\tau \cap \mu))$ , also eine gemeinsame Seite.
  - (iii) Falls  $\xi, \eta$  von der Form  $\xi = \text{konv}(\{\hat{\sigma}\} \cup \tau)$ ,  $\eta = \text{konv}(\{\hat{\nu}\} \cup \mu)$  mit  $\hat{\sigma} \neq \hat{\nu}$ , dann ist  $\xi \cap \eta = \tau \cap \mu$  eine gemeinsame Seite.
- (b) Einfache Aufgabe. ■

Die Konstruktion kann für abstrakte simpliziale Komplexe durchgeführt werden. Dies kann für endliche partiell geordnete Mengen  $(M, \leq)$  verallgemeinert werden.

Sei  $(M, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Dann bezeichne  $\Delta(M)$  den abstrakten simpliziale Komplex mit Eckenmenge  $M$  und allen Ketten in  $(M, \leq)$  (d.h. linear geordnete Teilmengen von  $(M, \leq)$ ) als Simplexe. Es ist klar, dass dies ein abstrakter simplizialer Komplex ist, da eine Teilmenge einer Kette einer Kette ist. Die  $k$ -Simplexe sind also Ketten der Länge  $k + 1$ ,  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  in  $(M, \leq)$ .

**Beispiel** Ecken  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$



**Definition** Der  $r$ -fach abgeleitete Komplex  $(\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)}$  von  $\mathcal{K}$  relativ zu  $\mathcal{L}$  ( $f$ -fache baryzentrische Unterteilung) ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)} &:= \mathcal{K} \\
 (\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r)} &:= ((\mathcal{K}, \mathcal{L})^{(r-1)}, \mathcal{L})'
 \end{aligned}$$

**Definition** Die Sternüberdeckung eines simplizialen Komplexes ist die Menge der Eckensterne von  $\mathcal{K}$ .

Die Maschenweite (mesh) einer offenen Überdeckung eines metrischen Raumes ist das Supremum der Durchmesser der Überdeckungsmengen und  $\text{mesh}(\mathcal{K})$ , für  $\mathcal{K}$  simplizialer Komplex, ist die Maschenweite der Sternüberdeckung von  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 4.6** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$  mit

$$\text{mesh}(\mathcal{K}^{(r)}) < \varepsilon.$$

**Beweis.** Sei  $\lambda$  das Maximum der Längen der 1-Simplexe von  $\mathcal{K}$ . Es ist klar, dass der Durchmesser von  $\text{Stn}(a) \leq 2\lambda$  für jede Ecke  $a$  in  $\mathcal{K}$  (jede Ecke von  $\mathbf{N}(a)$  ist in der abgeschlossenen Kugel um  $a$  mit Radius  $\lambda$  enthalten).

Sei  $n := \dim \mathcal{K}$ . Sei  $\lambda^{(r)}$  der maximale Kantenlänge in  $\mathcal{K}^{(r)}$ . Dann gilt  $\lambda^{(1)} \leq \frac{n}{n+1}\lambda$ , denn

$$d\left(a_0, \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_i\right) = \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (a_i - a_0) \right\| \leq \frac{m}{m+1} \max_{i=1, \dots, m} d(a_i, a_0).$$

Also

$$\text{mesh} \mathcal{K}^{(r)} \leq 2\lambda^{(r)} \leq 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \lambda,$$

und wegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^r = 0$$

folgt die Behauptung. ■

**Lemma 4.7 (Analysis)** Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum. Zu jeder offenen Überdeckung  $\{U_i \mid i \in I\}$  gibt es  $\delta > 0$  (die **Lebesgue-Zahl** von  $\{U_i \mid i \in I\}$ ), so dass jede Teilmenge von  $X$  vom Durchmesser  $< \delta$  in einer der  $U_i$  enthalten ist.

**Beweis.** Da  $X$  kompakt ist, ist  $I$  o.E. endlich, sagen wir  $I = \{1, \dots, n\}$ . Für  $x \in X$ ,  $i \in I$  definiere

$$\begin{aligned} f_i(x) &:= d(x, X \setminus U_i), \\ f(x) &:= \max_{i \in I} f_i(x) \end{aligned}$$

$f_i(x), f(x)$  sind stetig.  $f(X) \subseteq \mathbb{R}_+$  ist kompakt und  $0 \notin f(X)$ , da die  $U_i$  eine offene Überdeckung bilden und  $d(x, X \setminus U_i) = 0 \iff x \in X \setminus U_i$  (wegen  $X \setminus U_i$  kompakt). Also gibt es  $\delta > 0$  mit  $f(x) > \delta$  für alle  $x \in X$ . ■

**Satz 4.8** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe und  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$ , sodass  $f : |\mathcal{K}^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  eine simpliziale Approximation ist.

**Beweis.** Betrachte  $\{f^{-1}(\text{St}(b)) \mid b \text{ ist eine Ecke von } \mathcal{L}\}$ . Dies ist eine offene Überdeckung von  $|\mathcal{K}|$ . Nach Lemma 4.7 hat diese eine Lebesgue-Zahl  $\delta$ . Wähle  $r$  mit

$$\text{mesh} \mathcal{K}^{(r)} < \delta.$$

Dann gibt es für jede Ecke  $a$  in  $\mathcal{K}$  eine Ecke  $b$  in  $\mathcal{L}$  mit

$$\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}}(a) \subseteq f^{-1}(\text{St}_{\mathcal{L}}(b)) \implies f(\text{St}_{\mathcal{K}^{(r)}}(a)) \subseteq \text{St}(b).$$

Also hat  $f$  nach Proposition 4.2 eine simpliziale Approximation. ■

**Folgerung** Es gibt höchstens abzählbar viele Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ .

**Beweis.** Es gibt nur endlich viele simpliziale Abbildungen von  $\mathcal{K}^{(r)}$  nach  $\mathcal{L}$ . Nach Satz 4.8 und 4.3 gibt es für jede stetige Abbildung  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  ein  $r \in \mathbb{N}$ , sodass  $f$  homotop zu einer simplizialen Abbildung von  $\mathcal{K}^{(r)}$  nach  $\mathcal{L}$  ist. ■

Satz 4.8 wird noch verfeinert:

**Satz 4.9** Sei  $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$  ein simpliziales Paar,  $\mathcal{L}$  ein simplizialer Komplex,  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  stetig. Falls  $f|_{|\mathcal{M}|}$  simplizial ist, dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$  und eine simpliziale Abbildung  $h : |(\mathcal{K}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ , so dass  $h|_{|\mathcal{M}|} = f|_{|\mathcal{M}|}$  und  $h \simeq f \text{ rel } |\mathcal{M}|$  ist.

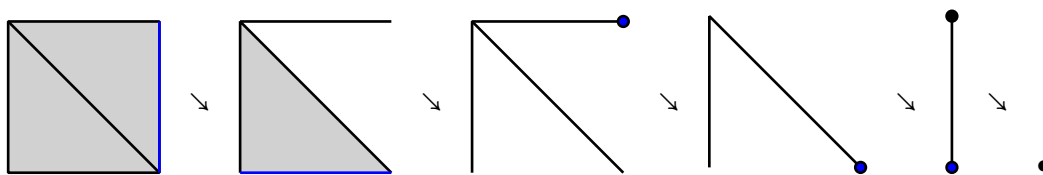
**Beweis.** Siehe z. B. in Maunder: Algebraic Topology Theorem 2.5.10. Beweisidee ähnlich wie in Satz 4.8. ■

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Ein  $n$ -Simplex  $\sigma$  von  $\mathcal{K}$  hat eine freie Seite  $\tau$ , falls  $\tau$  eine  $(n - 1)$ -Seite von  $\sigma$  ist, die nicht Seite eines anderen  $n$ -Simplexes in  $\mathcal{K}$  ist.

Falls  $\sigma$  eine freie Seite hat, dann ist  $\sigma$  in keinem Simplex von  $\mathcal{K}$  als eigentliche Seite enthalten, also ist  $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ . Der Übergang von  $\mathcal{K}$  zu  $\mathcal{K} \setminus \{\sigma, \tau\}$  heißt ein **elementarer Kollaps** und wir definieren  $\mathcal{K}$  **kollabiert zu**  $\mathcal{L}$  (geschrieben  $\mathcal{K} \searrow \mathcal{L}$ ), falls  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$  ein Unterkomplex ist, der aus  $\mathcal{K}$  durch eine Folge elementarer Kollapse erfolgt.

$\mathcal{K}$  heißt **kollabierbar**, falls  $\mathcal{K}$  auf einen einpunktigen simplizialen Komplex kollabiert,  $\{\{x\}, \emptyset\}$ .

**Beispiel**



**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Ein **Kantenweg** in  $\mathcal{K}$  von der Ecke  $a_0$  zur Ecke  $a_n$  ist eine Folge von Ecken  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , sodass für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $\text{konv}\{a_{k-1}, a_k\} \in \mathcal{K}$  ( $a_{k-1} = a_k$  zugelassen). Falls  $a_0 = a_n$  dann heißt er auch eine **Kantenschleife** mit Basispunkt  $a_0$ .

Falls  $\alpha = a_0, \dots, a_n$ ,  $\beta = a_n, \dots, a_{n+m}$  Kantenwege sind, dann ist  $\alpha\beta := a_0 \dots a_n \dots a_{n+m}$  das **Produkt** und  $\alpha^{-1} := a_n \dots a_0$  das **inverse Kantenweg**. Offensichtlich gilt  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$  und  $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

Zwei Kantenwege  $\alpha, \beta$  heißen **äquivalent**, geschrieben,  $\alpha \sim \beta$ , wenn sie durch eine (endliche) Folge von Operationen der folgenden Form ineinander überführt werden können:

(a) ersetze  $\alpha_1 a \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a a \alpha_2$   
 (a') ersetze  $\alpha_1 a a \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a \alpha_2$   
 und falls  $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$  ( $a, b, c$  nicht notwendig verschieden)

(b) ersetze  $\alpha_1 a b c \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a c \alpha_2$   
 (b') ersetze  $\alpha_1 a c \alpha_2$  durch  $\alpha_1 a b c \alpha_2$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2$  Kantenwege (« $\square$ » zugelassen),  $a, b, c$  Ecken von  $\mathcal{K}$  sind und  $\sim$  (nach Konstruktion) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kantenwege in  $\mathcal{K}$  ist.

Ferner gilt offensichtlich

**Proposition 4.10** Seien  $\alpha_1, \beta_1$  Kantenwege von  $a_0$  nach  $a_n$  und  $\alpha_2, \beta_2$  von  $a_n$  nach  $a_{n+m}$  mit  $\alpha_1 \sim \beta_1$  und  $\alpha_2 \sim \beta_2$ . Dann gilt:

- (i)  $\alpha_1 \alpha_2 \sim \beta_1 \beta_2$
- (ii)  $\alpha_1^{-1} \sim \beta_1^{-1}$
- (iii)  $a_0 \alpha_1 \sim \alpha_1 \sim \alpha_1 a_n$
- (iv)  $\alpha_1 \alpha_1^{-1} \sim a_0$  und  $\alpha_1^{-1} \alpha_1 \sim a_n$

**Beweis.** Klar. ■

**Folgerung 4.11 (und Definition)** Die Menge der Äquivalenzklassen (bzgl.  $\sim$ ) von Kanten-schleifen in  $\mathcal{K}$  mit Basispunkt  $a_0$  mit der Operation  $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$  bildet eine Gruppe mit  $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$  und neutralem Element  $[a_0]$ , die **Kantengruppe**. sie wird mit  $\tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  bezeichnet.

**Beweis.** Klar, vgl. Definition der Fundamentalgruppe. ■

**Satz 4.12** Es gilt

$$\tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0).$$

**Beweis.** Definiere  $\varphi : \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$  durch

$$\varphi([a_0 \dots a_n]) := [\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n}],$$

wobei

$$a_n = a_0,$$

$$\overline{a_{k-1} a_k}(t) := (1-t)a_{k-1} + t a_k,$$

$$\varphi([a_0]) := [\overline{a_0 a_0}].$$

$\overline{a_{k-1} a_k} : I \rightarrow |\mathcal{K}|$  ist ein Weg von  $a_{k-1}$  nach  $a_k$ , also

$$\overline{a_0 a_1} (\overline{a_1 a_2} (\dots (\overline{a_{n-1} a_n}) \dots))$$

ein Weg von  $a_0$  nach  $a_n = a_0$ .



$\varphi$  ist wohldefiniert: Die Operation (a) bzw. (a') bedeutet, dass Einfügen bzw. Entfernen eines konstanten Weges. Die Wege  $\overline{ab} \overline{bc}$  und  $\overline{ac}$  sind offenbar homotop in  $|\mathcal{K}|$  (vgl. Lemma 2.3), falls  $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$ . Also  $\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n} \simeq \overline{a_0 a_1} \dots \overline{ac} \dots \overline{a_{n-1} a_n}$  falls  $\text{konv}\{a, b, c\} \in \mathcal{K}$ .

$\varphi$  ist ein Gruppenhomomorphismus: Klar nach Definition.

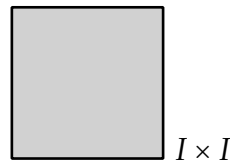
$\varphi$  ist surjektiv: Sei  $[w] \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ . Sei  $\mathcal{I}$  der zu  $I = [0, 1]$  gehörige simpliziale Komplex,  $\mathcal{I} = \{[0, 1], \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$ . Nach Satz 4.7 gibt es  $r \in \mathbb{N}$  und  $\tilde{w} : \mathcal{I}^{(r)} \rightarrow |\mathcal{K}|$  simplizial mit  $\tilde{w} \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$ , d.h.  $[\tilde{w}] = [w]$ . Sei  $u := 2^r$ ,  $a_k := \tilde{w}(\frac{k}{u})$ . Dann ist

$$\varphi([a_0 \dots a_n]) = [\overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n}] = [\tilde{w}] = [w]$$

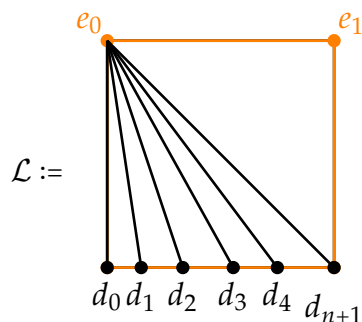
also  $\varphi$  surjektiv.

$\varphi$  ist injektiv. Zu zeigen:  $\varphi[\alpha] = e \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \implies \alpha \sim a_0$

Sei  $\alpha = [a_0 \dots a_n a_0]$ ,  $u := \overline{a_0 a_1} \dots \overline{a_{n-1} a_n a_n a_0}$ .  $u$  ist eine simpliziale Abbildung von einer Triangulierung von  $I$  mit Ecken  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{n+1} = 1$  und  $u(c_k) = a_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ),  $u(c_{n+1}) = a_0$ . Falls  $\varphi(\alpha) = e \in \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ , dann gibt es eine Homotopie  $F : I \times I \rightarrow |\mathcal{K}|$  mit  $F(t, 0) = u(t)$ ,  $F(t, 1) = F(0, t) = F(1, t) = a_0$  für alle  $t \in I$ .



Betrachte den simplizialen Komplex



$$\begin{aligned} d_i &= (e_i, 0), \\ e_0 &= (0, 1), \\ e_1 &= (1, 1) \end{aligned}$$

und  $\mathcal{M}$  mit  $|\mathcal{M}|$  ist der Rand von  $I \times I$  (in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).  $F|_{|\mathcal{M}|}$  ist simplizial, also gibt es nach Satz 4.9 eine simpliziale Abbildung

$$\tilde{F} : |(\mathcal{L}, \mathcal{M})^{(r)}| \rightarrow |\mathcal{K}|,$$

sodass  $\tilde{F}|_{|\mathcal{M}|} = F|_{|\mathcal{M}|}$  und  $\tilde{F} \simeq F \text{ rel } |\mathcal{M}|$ . Dies bedeutet

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 \dots a_n a_0 \\ &= F(d_0) \dots F(d_{n+1}) \\ &= \tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1}) \stackrel{(*)}{\sim} \tilde{F}(d_0) \tilde{F}(e_0) \tilde{F}(e_1) \tilde{F}(d_{n+1}) = a_0 a_0 a_0 a_0 a_0 \sim a_0. \end{aligned}$$

Zu (\*): Starte mit  $\tilde{F}(d_0) \dots \tilde{F}(d_{n+1})$ . Hänge nacheinander Dreiecke von  $\mathcal{L}^{(r)}$  ein. Dies entspricht einem Elementarschritt vom Typ (b') bzw. (b) in der Definition von  $\sim$  für das Bildsimplex unter  $\tilde{F}$ . ■

**Definition** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex. Ein eindimensionaler Unterkomplex  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$  heißt ein **Baum**, falls  $\mathcal{L}$  kontrahierbar ist und ein **aufspannender Baum**, falls  $\mathcal{L}$  ein Baum ist, der alle Ecken von  $\mathcal{K}$  enthält.

**Bemerkung**  $\mathcal{L}$  ist ein Baum genau dann, wenn  $\mathcal{L}$  zusammenhängend ist und keine Zyklen enthält.

**Proposition 4.13** Falls  $|\mathcal{K}|$  zusammenhängend ist, dann enthält  $\mathcal{K}$  einen aufgespannten Baum.

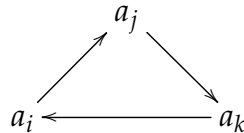
**Beweis.** Aufgabe 36 (1 P). ■

Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex,  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$  ein Unterkomplex. Sei  $|\mathcal{K}|$  wegzusammenhängend,  $|\mathcal{L}|$  kontrahierbar und enthalte  $\mathcal{L}$  alle Ecken von  $\mathcal{K}$  (z. B.  $\mathcal{L}$  aufspannender Baum in  $\mathcal{K}$  hat die gewünschten Eigenschaften). Ordne die Ecken von  $\mathcal{K}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Sei

$$M := \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}\},$$

mit  $g_{ij}$  verschiedene Symbole. Definiere in  $F(M)$  (freie Gruppe):

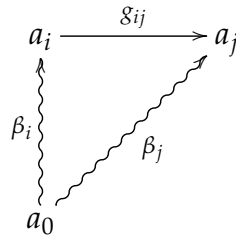
$$\begin{aligned} g_{ij} &:= \begin{cases} \varepsilon & , \text{ falls } \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L} \\ g_{ij}^{-1} & , \text{ falls } \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L} \end{cases} \\ R &:= \{g_{ij} g_{jk} g_{ik}^{-1} \mid i < j < k, \text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \setminus \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}\} \\ G &:= F(M) / \langle R \rangle \end{aligned}$$



**Satz 4.14**  $G \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$ .

**Beweis.** Nach Satz 4.12 ist  $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  (Kantengruppe). Wir konstruieren Homomorphismen  $\Theta : G \rightarrow \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$ ,  $\Phi : \widetilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow G$  und zeigen, dass  $\Theta \circ \Phi = \text{id}$ ,  $\Phi \circ \Theta = \text{id}$ .

Definition von  $\Theta$ :



Wähle für jede Ecke  $a_r$  einen (festen) Kantenweg  $\beta_r$  in  $\mathcal{L}$  von  $a_0$  nach  $a_r$  (möglich da  $\mathcal{L}$  wegzusammenhängend ist und alle Ecken in  $\mathcal{K}$  enthält). Definiere  $\tilde{\Theta} : M \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  durch

$$\tilde{\Theta}(g_{ij}) := [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}],$$

$\bar{\Theta} : F(M) \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  sei der eindeutig bestimmte Homomorphismus, der  $\tilde{\Theta}$  fortsetzt (universelle Eigenschaft von  $F(M)$ ), d.h.  $\bar{\Theta}\varphi = \tilde{\Theta}^3$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & F(M) \\ \downarrow \bar{\Theta} & \swarrow \exists! \bar{\Theta} & \downarrow \text{nat} \\ \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) & \xleftarrow{\exists! \Theta} & G = F(M) / \langle F \rangle \\ & \text{falls } R \subseteq \ker \bar{\Theta} & \end{array}$$

Zu zeigen:  $R \subseteq \ker \bar{\Theta}$ : Sei  $i < j < k$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}) &\stackrel{*}{=} [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}] [\beta_j a_j a_k \beta_k^{-1}] [\beta_k a_k a_i \beta_i^{-1}] \\ &\stackrel{**}{=} [\beta_i a_i a_j a_k \beta_i^{-1}] = [a_0], \end{aligned}$$

$**$ , falls  $\text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathcal{K}$  und  $*$  falls  $g_{ij} \in M$ , dann ist  $\bar{\Theta}(g_{ij}) = \tilde{\Theta}(g_{ij})$ .

Falls  $\text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L}$ , also  $g_{ij} = \varepsilon$ , dann ist auch

$$\bar{\Theta}(g_{ij}) = \bar{\Theta}(\varepsilon) = [a_0] = [\beta_i a_i a_j \beta_j^{-1}],$$

denn in  $\mathcal{L}$  sind nach Satz 4.12 alle Kantenwege äquivalent zu  $[a_0]$  (da  $\mathcal{L}$  kontrahierbar). Also  $\ker \text{nat} = \langle R \rangle \subseteq \ker \bar{\Theta}$ , also existiert eindeutig ein Homomorphismus  $\Theta : G \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0)$  mit  $\Theta \circ \text{nat} = \bar{\Theta}$ .

Definition von  $\Phi : \tilde{\pi}_1(\mathcal{K}, a_0) \rightarrow G$ :

$$\begin{aligned} \Phi([a_0 a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_0]) &:= g_{0i_1} g_{i_1 i_2} \dots g_{i_k 0} \\ g_{ij} &:= \varepsilon \end{aligned}$$

Nun weiter nach Anleitung in Aufgabe 37<sup>[✓]</sup>. ■

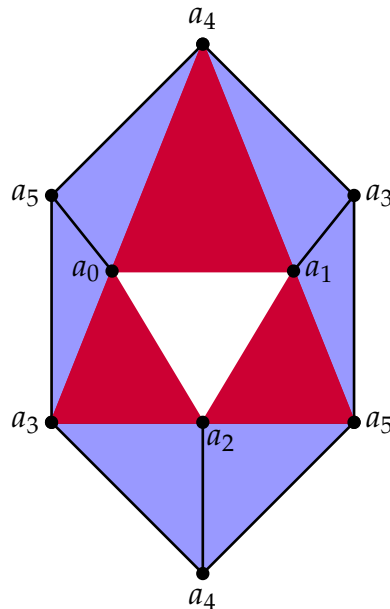
**Aufgabe 37 (4 P).** Zeige

- (a)  $\Phi$  ist wohldefiniert.
- (b)  $\Phi$  ist ein Gruppenhomomorphismus (trivial).
- (c)  $\Phi\Theta = \text{id}$ .

<sup>3</sup>Die natürliche Einbettung von  $M$  in die freie Gruppe.

(d)  $\Theta\Phi = \text{id}$ .

**Beispiel  $\mathbb{R}P^2$**



$\mathcal{K}$  mit  $|\mathcal{K}| \cong \mathbb{R}P^2$  reelle projektive Ebene und  $\mathcal{L}^4$

$M = \{g_{03}, g_{14}, g_{25}, g_{34}, g_{35}, g_{45}\}$  zu Kanten in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}^5$

$R = \{g_{03}g_{34}g_{04}^{-1}, g_{03}g_{35}g_{05}^{-1}, g_{13}g_{34}g_{14}^{-1}, g_{14}g_{45}g_{15}^{-1}, g_{24}g_{45}g_{25}^{-1}, g_{23}g_{35}g_{25}^{-1}\}$  Dreiecke in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}^6$   
 $= \{g_{03}g_{34}, g_{03}g_{35}, g_{34}g_{14}^{-1}, g_{14}g_{45}, g_{35}g_{25}^{-1}, g_{45}g_{25}^{-1}\}$

$- = e$

Verkleinerung des Erzeugendensystems:

$$\begin{aligned} g_{34} &:= g_{03}^{-1} & g_{45} &:= g_{14}^{-1} = g_{03} \\ g_{35} &:= g_{03}^{-1} & g_{25} &:= g_{35}^{-1} = g_{03} \\ g_{14} &:= g_{34} = g_{03}^{-1} \end{aligned}$$

also bleibt ein erzeugendes Element  $g_{03}$  übrig und die Relation

$$g_{45}g_{25}^{-1} = g_{03}g_{03} = g_{03}^{-1},$$

also

$$G \cong F(g_{03}) / \langle g_{03}^2 \rangle \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2,$$

also  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Für das Coprodukt von Gruppen schreiben wir auch  $G * H$  statt  $G \amalg H$  und fassen  $G, H$  als Untergruppen von  $G * H$  auf:

<sup>4</sup>Also die dunkelrote Fläche.

<sup>6</sup>Also die schwarzen «Verbindungsstrecken» der Knoten.

<sup>6</sup>Also die hellblau gefärbten Flächen.

**Satz 4.15 (Seifert, von Kampen)** Seien  $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  wegzusammenhängende simpliziale Komplexe mit  $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ . Sei  $a_0$  eine Ecke von  $\mathcal{N}$ . Seien  $\lambda : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ ,  $\mu : |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{M}|$  die Inklusionsabbildung. Dann gilt

$$\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) / \left\langle \{(\lambda_{\#}c)(\mu_{\#}c)^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\} \right\rangle$$

**Beweis.** Sei  $T_{\mathcal{N}}$  ein aufgespannender Baum in  $\mathcal{N}$ ,  $T_{\mathcal{L}} \supseteq T_{\mathcal{N}}$  ein aufspannender Baum in  $\mathcal{L}$  (Existenz klar),  $T_{\mathcal{M}} \supseteq T_{\mathcal{N}}$  ein aufspannender Baum in  $\mathcal{M}$ . Dann ist  $T_{\mathcal{K}} := T_{\mathcal{M}} \cup T_{\mathcal{L}}$  ein aufgespannender Baum in  $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  (wegen  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$  können keine Zyklen entstehen) und  $T_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{M} = T_{\mathcal{L}}$ ,  $T_{\mathcal{L}} \cap T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{N}}$ . Ordne die Ecken von  $\mathcal{K}$ , dies induziert eine Ordnung der Ecken von  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ . Nach Satz 4.14 ist

$$\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle$$

mit

$$M_{\mathcal{K}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

$$R_{\mathcal{K}} = \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} \mid i < j < k, \text{konv}\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}}\}$$

(mit der Konvention  $g_{ij} := \varepsilon$  falls  $\text{konv}\{a_i, a_j\} \in T_{\mathcal{K}}$ ).  $\mathcal{K} \setminus T_{\mathcal{K}} = (\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cup (\mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}) \cap (\mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}}) = \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}$  und

$$\begin{aligned} F(M_{\mathcal{K}}) / \langle R_{\mathcal{K}} \rangle &\cong F(M_{\mathcal{L}} \cup M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \cup R_{\mathcal{M}} \cup D \rangle \\ &\stackrel{*}{\cong} \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) / \langle \tilde{D} \rangle, \end{aligned}$$

wobei

$$M_{\mathcal{L}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{L} \setminus T_{\mathcal{L}}\}$$

$$M_{\mathcal{M}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{M} \setminus T_{\mathcal{M}}\}$$

mit  $M_{\mathcal{L}} \cap M_{\mathcal{M}} = \emptyset$ .

$$D := \{g_{ij}h_{ij}^{-1} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}\}$$

\* gilt wegen

$$\pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{L}}) / \langle R_{\mathcal{L}} \rangle$$

$$\pi_1(|\mathcal{M}|, a_0) \cong F(M_{\mathcal{M}}) / \langle R_{\mathcal{M}} \rangle$$

wobei

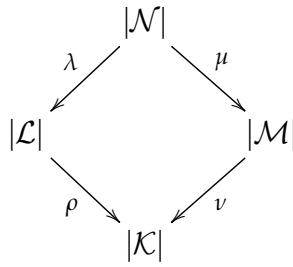
$$\tilde{D} = \{(\lambda_{\#}\Theta(g_{ij}))(\mu_{\#}\Theta(g_{ij}))^{-1} \mid g_{ij} \in M_{\mathcal{N}}\}$$

$$M_{\mathcal{N}} = \{g_{ij} \mid i < j, \text{konv}\{a_i, a_j\} \in \mathcal{N} \setminus T_{\mathcal{N}}\}$$

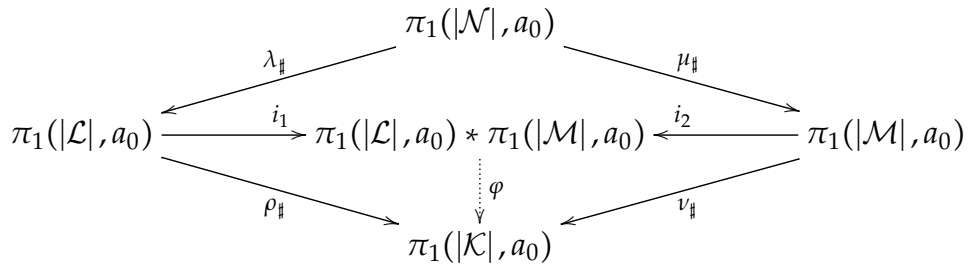
und  $\Theta : M_{\mathcal{N}} \rightarrow \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$  wie in Satz 4.14. Ferner gilt

$$\langle \tilde{D} \rangle = \left\langle \{(\lambda_{\#}(c)\mu_{\#}(c))^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)\} \right\rangle.$$

■



Dieses Diagramm induziert ein entsprechendes Diagramm von Gruppenhomomorphismen:



wobei  $\varphi$  der von  $\rho_{\#}, \nu_{\#}$  induzierte Gruppenhomomorphismus aus dem Coprodukt ist,  $i_1, i_2$  die natürlichen Einbettungen in das Coprodukt (in der Formulierung des Satzes werden  $\pi_1(|\mathcal{L}|, a_0), \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$  als Untergruppen des Coproduktes aufgefasst).

Der Satz sagt, dass  $\varphi$  surjektiv ist und dass

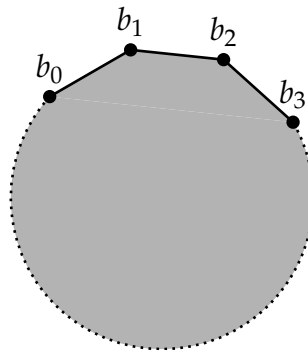
$$\ker \varphi = \left\{ \left\{ (i_1 \lambda_{\#}(c)) (i_2 \mu_{\#}(c))^{-1} \mid c \in \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \right\} \right\}$$

**Bemerkung** Es reicht in Satz 4.15 ein Erzeugendensystem  $E \subseteq \pi_1(|\mathcal{N}|, a_0)$  zu wählen. Spezialfall von Satz 4.15:

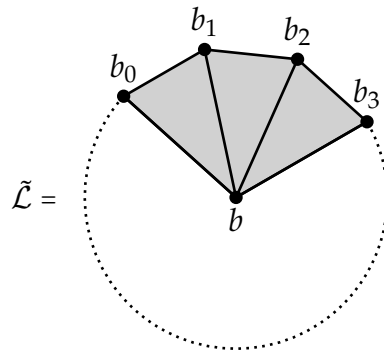
Falls  $|\mathcal{N}|$  einfach zusammenhängend ist, dann ist  $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0) * \pi_1(|\mathcal{M}|, a_0)$ .

Wir wollen nun Satz 4.15 auf die Situation anwenden, dass eine Kreisscheibe entlang des Randes in einen topologischen Raum eingeklebt wird.

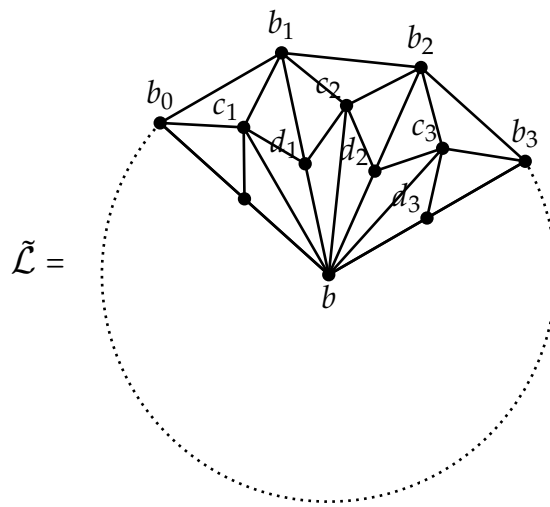
Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex.  $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n a_0$  ( $n \geq 2$ ) eine Kantenschleife in  $\mathcal{K}$ , sodass  $a_i \neq a_{i+1}, a_n \neq a_0$ .  $\alpha$  induziert eine simpliziale Abbildung der triangulierten Kreislinie



in  $\mathcal{K}$ ,  $b_i \mapsto a_i$ . Dies ist der Rand eines  $(n + 1)$ -Eckes. Sei



$\mathcal{M}$  sei der «Rand»  $\mathcal{L}$  (Polygon). Sei  $\mathcal{L} = (\tilde{\mathcal{L}}, M)'$ , also



Sei  $\mathcal{N}$  der Komplex, der aus  $\mathcal{K} \cup \mathcal{L}$  durch Identifikation von  $b_i$  mit  $a_i$  entsteht. Damit werden die Kanten  $b_i b_{i+1}$  mit  $a_i a_{i+1}$  identifiziert (und  $b_n b_0$  mit  $a_n a_0$ ). Wie man sich leicht überlegt, entstehen keine weiteren Identifikationen von Simplizes (beachte  $a_i \neq a_{i+1}$ ) und damit

$$|\mathcal{N}| \cong |\mathcal{K}| \cup_f |\mathcal{L}|,$$

$f$  die simpliziale Abbildung von  $|\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{K}|$ .

**Satz 4.16**  $\pi_1(|\mathcal{K}| \cup_f |\mathcal{L}|) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta([a]) \rangle$ .

**Beweis.** Wähle in  $\mathcal{L}$  ein Simplex  $\sigma = \text{konv}\{b_0, d_0, c_1\}$ ,  $Y := |\mathcal{N} \setminus \{\sigma\}|$ . Nach Satz 4.15 erhält man für  $\mathcal{N}$ :

$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(Y, y_0) * \pi_1(\sigma, a_0) / \langle D \rangle,$$

und

$$D = \left\{ \lambda_{\#}(d) (\mu_{\#} d)^{-1} \mid d \in \pi_1(|\partial\sigma|, a_0) \right\},$$

wobei  $\lambda : |\partial\sigma| \rightarrow |\mathcal{N} \setminus \sigma|$ ,  $\mu : |\partial\sigma| \rightarrow \sigma$  die Einbettungen sind,  $\partial\sigma$  der Randkomplex von  $\sigma$ .

$\pi_1(\sigma_0, a_0) = \{0\}$  die triviale Gruppe, also  $\mu_{\#}d = e$  für alle  $d \in \pi_1(|\partial\sigma|)$ .  $\pi_1(|\partial\sigma|, a_0) \cong \mathbb{Z}$  mit  $\Theta([\beta])$ ,  $\beta = b_0d_0c_1b_0$  als erzeugendem Element ( $a_0 = b_0$  nach Identifikation), also

$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(Y, a_0) / \langle \Theta([\beta]) \rangle.$$

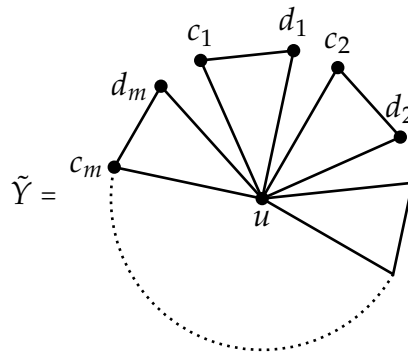
Nun ist  $|\mathcal{L}|$  konvex und damit ist die Zentralprojektion vom Schwerpunkt von  $\sigma$  auf  $|\mathcal{M}|$  eine (starke) Deformationsretraktion von  $|\mathcal{L} \setminus \{0\}|$  auf  $|\mathcal{M}|$  und diese kann zu einer Deformationsretraktion  $\rho : Y \rightarrow |\mathcal{K}|$  fortgesetzt werden. Damit ist  $\rho_{\#} : \pi_1(Y, a_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0)$  ein Isomorphismus und die Komposition  $\rho_{\#}\Theta[\beta] = \Theta[\alpha]$ , also

$$\pi_1(|\mathcal{N}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) / \langle \Theta[\alpha] \rangle.$$

■

**Satz 4.17** Zu jeder endlich präsentierten Gruppe  $G \cong F(M)/\langle A \rangle$  gibt es einen zweidimensionalen wegzusammenhängenden simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$  mit  $\pi_1(|\mathcal{K}|) \cong G$ .

**Beweis.** Sei  $M = \{b_1, ds, b_m\}$ ,  $A = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq F(M)$ ,



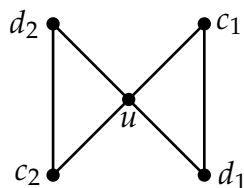
$$b_i = [uc_i d_i u].$$

Dann ist

$$\pi_1(|\mathcal{Y}|) \cong \widehat{\pi}_1(Y, u) \cong F(\{b_1, \dots, b_m\}).$$

Für jedes  $\beta_i \in A$  klebe wie in Satz 4.16 ein Polygon (topologische Kreisscheibe) ein.  $\beta_i$  entspricht einem geschlossenen Kantenweg, dessen aufeinanderfolgende Ecken verschieden sind. Dies ergibt ein simplizialen Komplex  $\mathcal{K}$ . Nach Satz 4.16 ( $n$  mal angewendet) erhält man  $\pi_1(|\mathcal{K}|, u) \cong G$ . ■

**Beispiel**  $G = F\{a, b\} / \langle a^3, b^4, (ab)^2 \rangle$





Kantenwege:

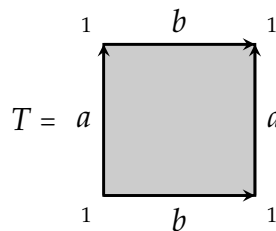
$$uc_1d_1uc_1d_1uc_1d_1u$$

$$uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2uc_2d_2u$$

$$uc_1d_1uc_2d_2uc_1d_1uc_2d_2u$$

**Folgerung 4.18** Nach Satz 4.17 hängt die Fundamentalgruppe eines simplizialen Komplexes nur von dessen 2-dimensionalen Skeletts ab, d.h. wenn  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  simpliziale Komplexe sind mit  $Sk_2(\mathcal{K}) = Sk_2(\mathcal{L})$ , dann ist  $\pi_1(|\mathcal{K}|, a_0) \cong \pi_1(|\mathcal{L}|, a_0)$ .

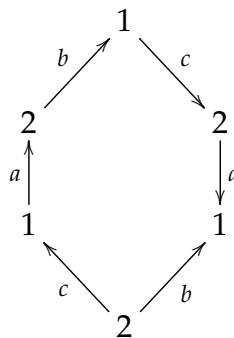
**Beispiele (1) Torus**



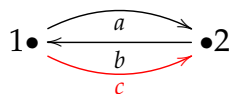
Dann ist

$$\pi_1(T) \cong F\{a, b\} / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(2) Mit natürlicher Eckenidentifikation



Dann



$c$  neutrales Element und

$$\pi_1(\tilde{T}) \cong F(\{a, b\}) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

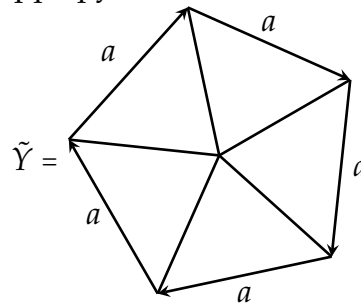
(3) Der Linsenraum  $L(p, q)$ . Sei  $1 \leq q < p$ ,  $p \geq 3$  und  $p, q$  teilerfremd. Sei  $X$  ein topologischer Raum, der aus einem Doppelkegel über dem regulären  $p$ -Eck entsteht durch Identifikation von jedem Dreieck auf der «Oberseite» mit dem entsprechenden Dreieck auf der «Unterseite» nach einer Dreiecksspiegelung um  $\frac{2\pi \cdot q}{p}$  zusammen mit der induzierten Identifikation der Kanten und Ecken.

z. B.  $L(5, 2)$

Betrachte eine Triangulierung  $\mathcal{K}$  von  $L(p, q)$ , die ein Simplex  $\sigma$  im Inneren der Doppelpyramide hat und  $x_0$  im Inneren von  $\sigma$ . Dann ist die Zentralprojektion von

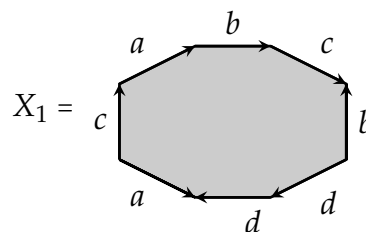
$x_0$  aus auf den «Rand» (Oberfläche) eine Deformationsretraktion.

Sei  $Y$  die Oberfläche der Doppelpyramide **nach** der Identifikation, also

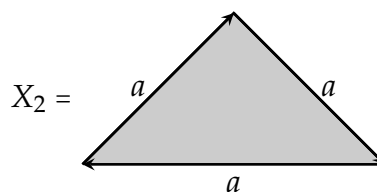


**Aufgabe 38 (4 P).** Bestimme  $\pi_i(X_i)$   $i = 1, 2, 3$  jeweils mit der natürlichen Identifikation der Ecken, wobei

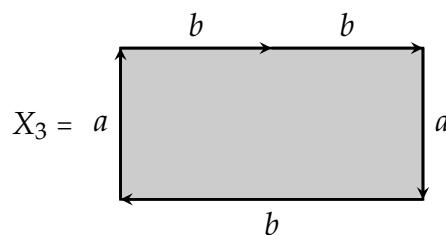
(a)



(b)

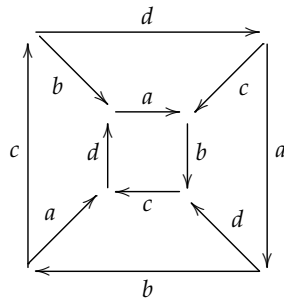


(c)



**Aufgabe 39 (7 P).** Sei  $X$  der Raum, der entsteht, wenn man beim 3-dimensionalen Würfel Paare gegenüberliegender Seiten nach einer Drehung um  $90^\circ$  miteinander

identifiziert und der induzierten Identifikation der Ecken und Kanten.



Bestimme  $\pi_1(X)$

- Als Gruppe durch Erzeugende und Relationen (möglichst vereinfachen mit weniger Erzeugenden) (3 P).
- Zeichne das Cayley-Diagramm der Gruppe und bestimme damit die Ordnung der Gruppe (4 P).

## 5 Klassifikation der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

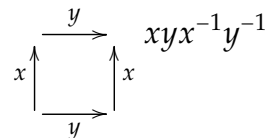
**Satz 5.0** Jede 2-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

**Lemma 5.1** Sei  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex, sodass  $|\mathcal{K}|$  eine zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit ist. Dann ist  $|\mathcal{K}|$  homöomorph zu einem Polygon in  $\mathbb{R}^2$  mit  $2n$  Seiten (für ein  $n \geq 2$ ), dessen Kanten in Paaren identifiziert werden mit der induzierten Identifikation der Ecken. Umgekehrt ist ein Polygon mit paarweise identifizierten Kanten und induzierter Identifikation der Ecken eine 2-Mannigfaltigkeit.

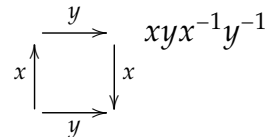
**Beweis.** Erzählt. ■

Ordne jedem solchen  $2n$ -Eck mit paarweise identifizierten Kanten ein Wort zu. Mit Buchstaben sind die Kantennamen und formale Inverse (Element der freien Gruppe mit  $n$  Erzeugenden) Durchlauf des Randes in festem Umlaufsinn.

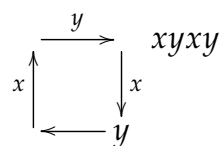
Torus



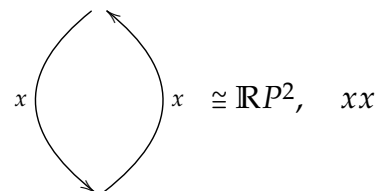
Kleinsche Flasche



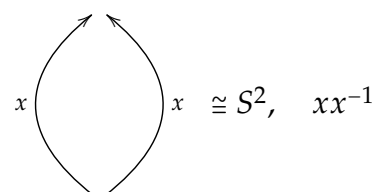
Projektive Ebene



In Verallgemeinerung sollen



und homöomorph  $S^2$



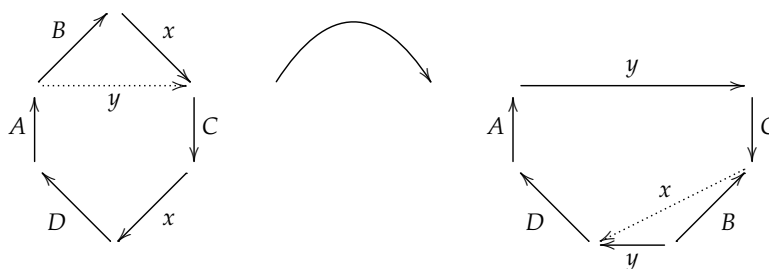
zugelassen werden. Solche Worte sollen **zulässig** heißen.

**Ziel** Durch Zerschneiden und Zusammensetzen des Polygons soll gezeigt werden, dass man stets zu einem Wort in der «Normalform»

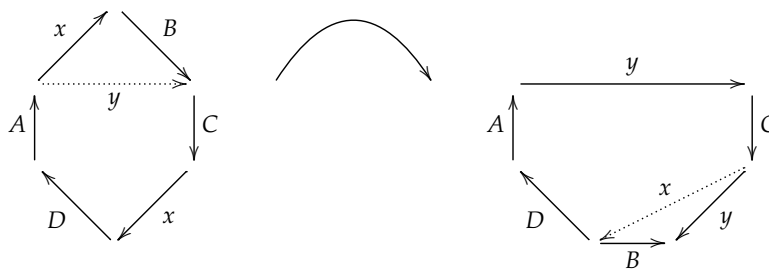
$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h$  ( $h \geq 1$ ) oder  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  ( $g \geq 1$ ) oder  $aa^{-1}$  kommen kann.

**Regeln**

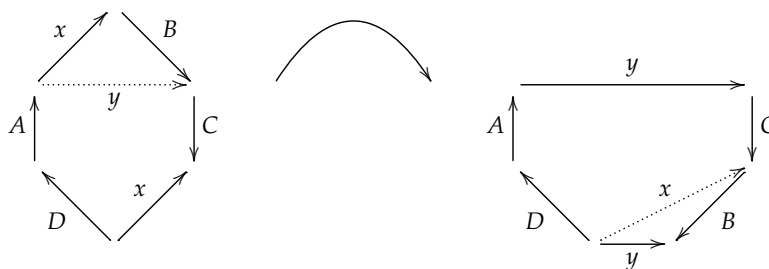
(1a)  $ABxCxD \rightarrow AxCB^{-1}xD$  (siehe Fußnote <sup>7</sup>)



(1b)  $AxBCxD \rightarrow AxCx B^{-1}D$



(2a)  $AxBCx^{-1}D \rightarrow AxCBx^{-1}D$



(2b)  $ABxCx^{-1}D \rightarrow AxCx^{-1}BD$

(3) Falls  $AB \neq \square$ :  $Axx^{-1}B \rightarrow AB$

**1. Schritt** Bringe das Wort auf die Form  $RS$ , wobei

- $R$  von der Form  $x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_k x_k$  ist und
- $S$  nur inverse Paare enthält (also jeder Buchstabe in  $S$  einmal als  $x$  und einmal als  $x^{-1}$  vorkommt)

<sup>7</sup>Anschließend benenne  $y$  in  $x$  um.

**Rekursiv** (nur Regel 1 anwenden), Annahme  $A$  sei schon von der Form  $x_1x_1\dots x_kx_k$  und maximal

$$ABxCxD \xrightarrow{(1a)} AxCB^{-1}xD \xrightarrow{(1b)} AxxBC^{-1}D$$

damit ein weiteres gleichartiges Paar «nach vorne» gebraucht, wende das an solange wie möglich, dann fertig.

**2. Schritt** Bringe  $RS$  auf die Form  $RTK$ , wobei  $T$  von der Form

$$y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1}\dots y_mz_my_m^{-1}z_m^{-1}$$

ist und  $U$  nur unverschlungene inverse Paare enthält.

- unverschlungene inverse Paare sind von einer der Formen:

$$\dots x\dots x^{-1}\dots y\dots y^{-1}\dots \text{ oder } \dots x\dots y\dots y^{-1}\dots x^{-1}\dots$$

- verschlungene inverse Paare von der Form:

$$\dots x\dots y\dots x^{-1}\dots y^{-1}\dots$$

Sei  $A$  schon von der gewünschten Form (wie  $RT$ ) und maximal

$$\begin{aligned} A \boxed{B} aCbDa^{-1}Eb^{-1}F &\xrightarrow{(2)} AaCb \boxed{Da^{-1}} BEb^{-1}F \xrightarrow{(2)} Aa \boxed{Cb} BEDa^{-1}b^{-1}F \\ &\xrightarrow{(2)} Aa \boxed{BEDC} ba^{-1}b^{-1}F \xrightarrow{(2)} Aaba^{-1}b^{-1}BEDCF, \end{aligned}$$

damit ein weiteres verschlungenes inverses Paar «nach vorne gebracht». Iteriere bis es hinten keine verschlungenen inversen Paare mehr gibt und beachte, dass keine gleichartigen Paare entstehen können.

**3. Schritt** Falls  $RT = \square$ , bringe auf  $xx^{-1}$ , andernfalls kann  $U$  weggelassen werden, wie gezeigt wird.  $U$  besteht aus unverschlungenen Paaren.

Sei  $\dots x\dots x^{-1}\dots$  eines, welches am engsten zusammen ist. Dann kann kein Buchstabe dazwischen stehen, denn falls  $y, y^{-1}$  beide dazwischen liegen, sind  $\dots y\dots y^{-1}$  enger zusammen, falls von  $y, y^{-1}$  nur ein Buchstabe dazwischen steht bilden  $x, y$  ein verschlungenes Paar. Also von der Form

$$U_1xx^{-1}U_1 \xrightarrow{(3)} U_1U_2$$

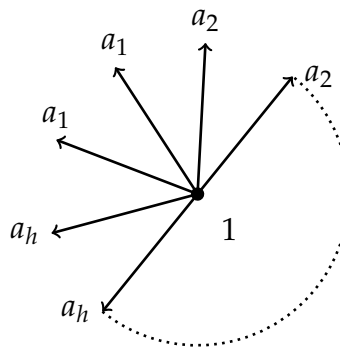
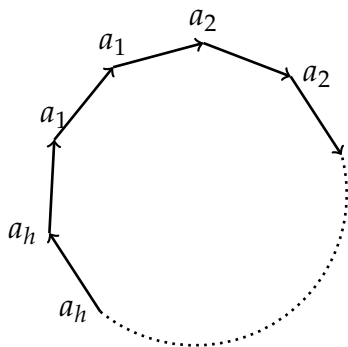
Iteriere bis  $U$  verschwunden ist (falls  $RT \neq \square$ ) bzw.  $xx^{-1}$  erreicht ist.

**4. Schritt** Falls  $R = \square$  ist, ist  $T$  von der gewünschten Form. Falls  $R \neq \square$  ist, bringe  $RT$  auf die Form  $x_1x_1\dots x_lx_l$ , d.h. führe die verschlungenen inversen Paare in gleichartige Paare über.

$$\begin{aligned} Axx \boxed{ab} a^{-1}b^{-1}B &\xrightarrow{(1)\text{invers}} Ax b^{-1} \boxed{a^{-1}xa^{-1}} b^{-1}B \xrightarrow{(1)\text{invers}} Axa \boxed{x^{-1}} ab^{-1}b^{-1}B \\ &\xrightarrow{(1)\text{invers}} Ax xaab^{-1}b^{-1}B \end{aligned}$$

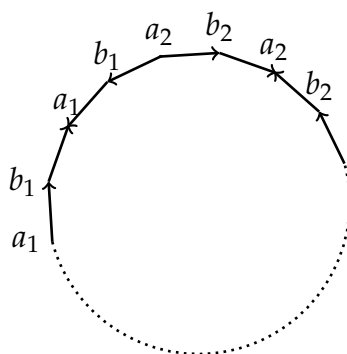
Damit ist gezeigt, dass jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer der folgenden ist:

$N_h$  beschrieben durch  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h$   $h \geq 1$ :



Umgebung der Ecke 1

$M_g$  beschrieben durch:



Sei  $G$  eine Gruppe. Dann bezeichne<sup>8</sup>

$$K(G) := \langle \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\} \rangle$$

Offensichtlich ist  $K(G)$  der kleinste Normalteiler, so dass  $G/K(G)$  abelsch ist.  $G/K(G)$  heißt die **Kommutatorfaktorgruppe von  $G$**  (« $G$  abelsch gemacht»).

Die Fundamentalgruppen

$$\pi_1(M_0) \cong \pi_1(S^2) = \{e\},$$

triviale Gruppe (Tetraeder kontrahierbarer Unterkomplex, der alle Kanten enthält, also 0 Erzeugende, also Fundamentalgruppe trivial).

$$\pi(N_h) \text{ für } h \geq 1$$

<sup>8</sup>{...} der erzeugte Normalteiler.

also

$$\begin{aligned}\pi_1(N_h) &\cong F(\{a_1, \dots, a_h\}) / \langle a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h \rangle \\ \pi_1(M_g) &\cong F(\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\}) / \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,\end{aligned}$$

also

$$\pi_1(M_g) / K(\pi_1(M_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

da  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} = e$  in einer abelschen Gruppe stets gilt.

$$\pi_1(N_h) / K(\pi_1(N_h)) \cong \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2,$$

denn in der frei-abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}^h$  mit Basis  $a_1, \dots, a_h$  können wir auch die Basis  $a_1, \dots, a_{h-1}, a_1 + a_2 + \dots + a_h =: \tilde{a}_h$  wählen.

Die Relation  $0 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_h 2\tilde{a}_h$  (additiv geschrieben) zeigt, dass wir  $\mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$  erhalten.

**Folgerung** Die 2-Mannigfaltigkeit  $M_g$  ( $g \geq 0$ ),  $N_h$  ( $h \geq 1$ ) haben paarweise nicht isomorphe Fundamentalgruppen und sind damit folglich paarweise nicht homotopie-äquivalent, insbesondere paarweise nicht homöomorph.

**Satz 5.2** Jede geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten ist homöomorph zu genau einer der 2-Mannigfaltigkeiten  $M_g$  ( $g \geq 0$ ) bzw.  $N_h$  ( $h \geq 0$ ). Diese sind paarweise nicht homotopie-äquivalent.

**Folgerung** Für geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten  $M, \tilde{M}$  gilt:

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(\tilde{M}) \iff M \simeq \tilde{M} \iff M \cong \tilde{M}$$

Bezeichne  $f_0$  die Zahl der Ecken,  $f_1$  die Zahl der Kanten,  $f_2$  die Zahl der Flächen (Polygone) nach Identifikation. Dann gilt


$$f_0 - f_1 + f_2$$

ist nur von der Mannigfaltigkeit abhängig, aber nicht von der Zerlegung.

$$\chi(X) := f_0 - f_1 + f_2$$

heißt die **Euler-Charakteristik von  $X$** .

**Beweisskizze.** Die folgenden Operationen und ihre Inversen ändern die Euler-Charakteristik nicht:

- (1) Einfügen einer Ecke auf eine Kante   $f_0 \mapsto f_0 + 1, f_1 \mapsto f_1 + 1, f_2 \mapsto f_2$
- (2) Unterteilen eines Polygons durch Einfügen einer Kante zwischen zwei Ecken:  $f_0 \mapsto f_0, f_1 \mapsto f_1 + 1, f_2 \mapsto f_2 + 1$

■

**Verallgemeinerung** Endliche CW-Räume



**Definition** Ein **in Zellen zerlegter Raum**  $X$  ist ein topologischer Raum  $X$ , zusammen mit einer Menge  $Z$  von Unterräumen, sodass gilt:

- (1) Jedes Element von  $Z$  ist homöomorph zu einer offenen Kugel (irgendeiner endlichen Dimension).
- (2)  $X = \bigcup Z$  und die Mengen in  $Z$  sind paarweise disjunkt.

**Definition** Das  **$n$ -dimensionale Gerüst** von  $X$  ist

$$X^n := \bigcup \{e \in Z \mid \dim e \leq n\}.$$

**Definition**  $e \subseteq X$  heißt eine  **$n$ -Zelle**, falls  $e \cong B^n$  (offene Kugel). Sei  $e \subseteq X$  eine  $n$ -Zelle. Eine stetige Abbildung  $F : D^n \rightarrow X$  heißt eine **charakteristische Abbildung** von  $e$ ,<sup>9</sup> wenn  $F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$  gilt und  $F|_{B^n}^e : B^n \rightarrow e$  ein Homöomorphismus ist.  $F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  nennt man eine **Klebeabbildung** von  $e$ .

**Bemerkung** Sei  $X$  hausdorffsch ( $T_2$ ). Dann gilt:

$$\bar{e} = F(D^n) \subseteq X^{n-1} \cup e$$

und

$$\bar{e} \setminus e = F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}.$$

$F : D^n \rightarrow \bar{e}$  ist identifizierend.<sup>10</sup>

**Definition** Ein **CW-Raum** ist ein in Zellen zerlegter  $T_2$ -Raum, sodass jede Zelle  $e \in Z$  eine charakteristische Abbildung besitzt und

(C) für jede Zelle  $e \in Z$  gilt:  $\bar{e}$  trifft nur endlich viele Zellen.<sup>11</sup>

(W) wenn  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen in  $\bar{e}$  für alle  $e \in Z$  ist, dann ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ .<sup>12</sup>

**Definition** Falls  $X = X^n$  und  $X \neq X^{n-1}$  dann heißt  $X$   **$n$ -dimensional**, geschrieben  $\dim X = n$ .  $\dim X = \infty$ , falls es kein solches  $n$  gibt.  $X$  heißt **endlicher CW-Raum**, falls  $Z$  endlich ist.

**Bemerkung** Falls  $Z$  endlich ist, dann sind die Forderungen (C) und (W) automatisch erfüllt.

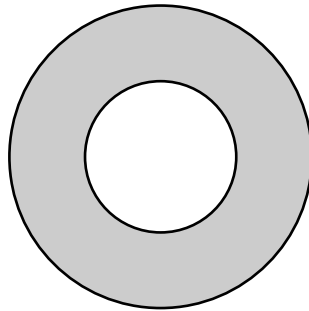
## Beispiel

<sup>9</sup> $D^n$  ist die abgeschlossene  $n$ -dimensionale Kugel.

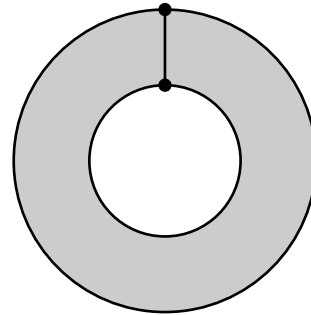
<sup>10</sup> $\bar{e}$  trägt die Finaltopologie bzgl.  $F$ .

<sup>11</sup>(C) = closure.

<sup>12</sup>D.h.  $X$  trägt die induzierte Topologie, die von diesem Unterraum erzeugt wird. (W) = weak topology.



nicht als CW-Raum dargestellt



CW-Raum  $f_0 = 2, f_1 = 3, f_2 = 1$

**Satz und Definition** Sei  $X$  ein endlicher CW-Raum. Dann bezeichne  $f_i(X)$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Zellen.

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i f_i(X)$$

heißt die **Euler-Charakteristik von  $X$**  und es gilt für CW-Räume

$$X, Y : X \simeq Y \implies \chi(X) = \chi(Y),$$

d.h. die Euler-Charakteristik ist eine Invariante für Homotopie-Äquivalenz.

### Klassifikation der kompakten zusammenhängenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten:

Jede solche ist homöomorph zu entweder  $M_{g,r}$  oder  $N_{h,r}$ . Dabei ist  $M_{g,r}$  bzw.  $N_{h,r}$  homöomorph zu  $M_g$  bzw.  $N_h$  aus dem  $r$  2-Zellen  $e_1, \dots, e_r$  entfernt wurden mit  $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Ferner gilt: Diese sind paarweise nicht homöomorph und:

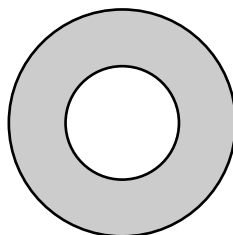
$$\chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

$$\chi(M_{g,r}) = 2 - 2g - r$$

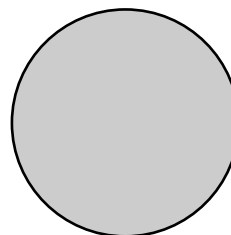
$$\chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$$

$$\chi(N_{h,r}) = 2 - h - r$$

### Beispiel



$M_{0,2}$



$M_{0,1}$

**Orientierbarkeit**

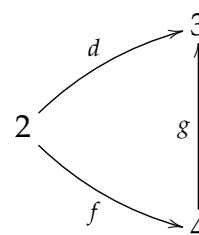
Sei  $M$  eine (eventuell berandete) 2-Mannigfaltigkeit, die über ein Polygon mit Kantenidentifikation gegeben ist. Dann gilt: Falls mindestens eine Kante zwei mal als  $x$  auftritt (in der selben Orientierung), dann ist  $M \cong N_{h,r}$  für ein  $h, r$ ; anderenfalls  $M \cong M_{g,r}$  für ein  $g, r$ .  $r$  ist dabei die Anzahl der Komponenten des Mannigfaltigkeitsrandes.<sup>13</sup>

**Beispiel**

$${}_1a_1b_2c_1a_1^{-1}c_2^{-1}d_3e_1b_2f_4g_3e_1$$

ist nicht orientierbar (beachte  $e$ ) und

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{4}{f_0} - \frac{7}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -2 \\ r &= 1 \\ M &\cong N_{h,1} \\ \chi(M) = -2 &= 2 - h - 1 \implies h = 3 \end{aligned}$$



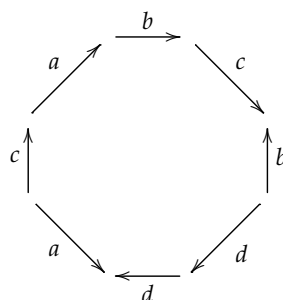
also  $M \cong N_{3,1}$ .

**Folgerung 5.3** Zwei möglicherweise berandete kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn beide orientierbar oder beide nicht orientierbar sind, dieselbe Euler-Charakteristik und dieselbe Zahl von Randkomponenten besitzen.

Seien  $A_1, A_2$  zwei zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten. Dann bezeichne  $A_1 \# A_2$  die Mannigfaltigkeit, die entsteht indem aus  $A_1$  und  $A_2$  eine offene 2-Zelle entfernt wird und anschließend  $A_1$  und  $A_2$  verklebt werden durch einen Homöomorphismus der entstehenden Ränder.

**Aufgabe 40 (2 P).** Bestimme, um welche geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten es sich handelt.

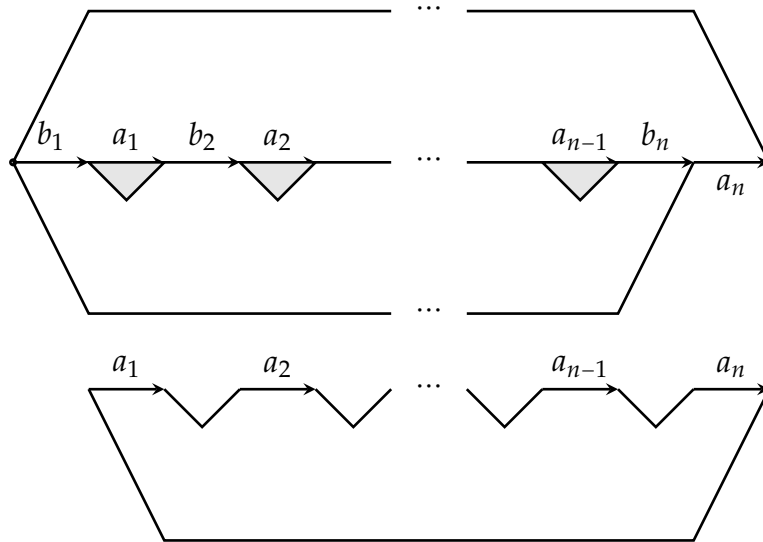
- (a)  $M_{g_1} \# M_{g_2}$
- (b)  $M_g \# N_h$
- (c)  $N_{h_1} \# N_{h_2}$
- (d)



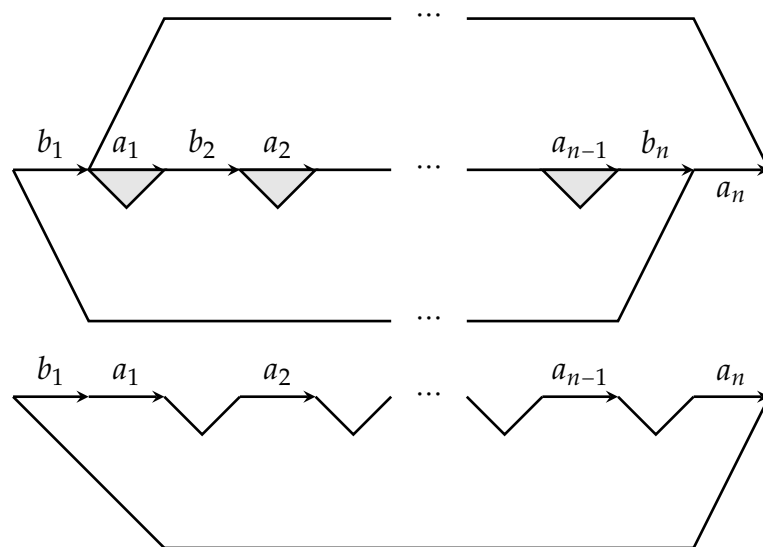
<sup>13</sup>Betrachte alle Kanten, die nicht zwei mal auftreten und beachte die Eckenidentifikation.

**Aufgabe 41 (4 P).** Bestimme von welchem Typ die folgenden berandeten 2-Mannigfaltigkeiten sind (unbezeichnete Kanten werden nicht identifiziert).

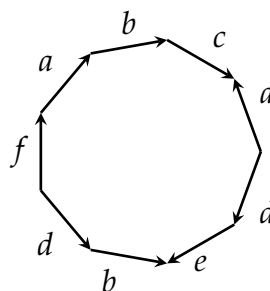
(i)



(ii)



(iii)



## 6 Homologiegruppen

**Definition** Für  $n \geq 0$  bezeichne  $\Delta_n := \text{konv}\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  das «Standardsimplex»,  $a_0 := 0, a_i = e_i$  ( $i$ -ter Standardbasisvektor des  $\mathbb{R}^n$ ), wobei  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$  für  $m > n$  betrachtet wird.

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein **singuläres  $n$ -Simplex** ist eine stetige Abbildung  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$ .

**Definition** Sei  $M$  eine Menge.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{(M)} := \text{FAb}(M) &:= \{f : M \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in M\} \\ &\subseteq \text{Abb}(M, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

heißt **freie abelsche Gruppe**. Wir fassen  $M$  als Teilmenge von  $\text{FAb}(M)$  auf, indem wir  $x \in M$  mit  $f_x : M \rightarrow \mathbb{Z}$  identifizieren, wobei

$$f_x(y) := \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

**Definition** Die  **$n$ -te singuläre Kettengruppe von  $X$**  ist

$$\begin{aligned} S_n(X) &:= \text{FAb}\{\lambda : \Delta_n \rightarrow X \mid \lambda \text{ stetig}\} \text{ für } n \geq 0, \\ S_n(X) &:= 0 \text{ (triviale Gruppe) für } n < 0. \end{aligned}$$

Die  **$r$ -te Seitenabbildung**  $F^r : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  ist die simpliziale Abbildung mit

$$F^r(a_i) = \begin{cases} a_i & i \leq r-1 \\ a_{i+1} & i \geq r \end{cases}.$$

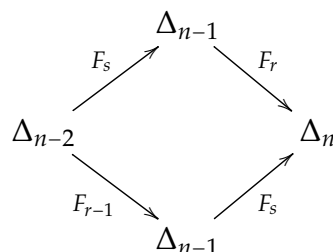
$F^r$  ist ein singuläres  $(n-1)$ -Simplex in  $\Delta_n$ .

**Bezeichnung** Falls  $\mathcal{K}$  ein simplizialer Komplex ist, dann bezeichne  $(x_0, \dots, x_n)$  die eindeutig bestimmte simpliziale Abbildung  $\varphi : \Delta_n \rightarrow \mathcal{K}$  mit  $\varphi(a_i) = x_i$ . Dann kann  $F^r$  auch als

$$(a_0, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_n) \text{ bzw. kürzer } (a_0, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n)$$

geschrieben werden. Offenbar gilt für  $s < r$ :

$$F^r F^s = F^s F^{r-1} = (a_0, \dots, \hat{a}_s, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n) \quad (*)$$



**Definition** Sei  $n \geq 1$ ,  $X$  ein topologischer Raum. Dann bezeichne

$$\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus mit

$$\partial(\lambda) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \lambda \circ F^i$$

für alle singulären  $n$ -Simplizes, mit  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$ .  $\partial$  heißt die **Randabbildung**.

**Proposition 6.1 (!)** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $n \in \mathbb{Z}$ , dann gilt:  $\partial^2 = 0$

$$S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$$

**Beweis.** Für  $n < 2$  trivial. Für  $n \geq 2$  reicht es die Behauptung für die singulären  $n$ -Simplizes zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial^2(\lambda) &= \partial \left( \sum_{r=1}^n (-1)^r \lambda F^r \right) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^n (-1)^{r+s} \lambda F^r F^s \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{0 \leq s < r \leq n} (-1)^{r+s} \lambda F^s F^{r-1} + \sum_{0 \leq r \leq s \leq n-1} (-1)^{r+s} \lambda F^r F^s \end{aligned}$$

Für  $0 \leq i \leq j < n$  kommt der Term  $\lambda F^i F^j$  in der ersten Summe mit dem Koeffizienten  $(-1)^{i+j+1}$  und in der zweiten Summe mit  $(-1)^{i+j}$  vor, also  $\partial^2(\lambda) = 0$ . ■

**Definition** Sei  $A_i$ ,  $i \in I$  eine Familie von abelschen Gruppen. Dann ist die **direkte Summe**  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  definiert als

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} A_i &:= \left\{ \varphi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \text{ und} \right. \\ &\quad \left. \varphi(i) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I \right\} \\ &\subseteq \prod_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

$(\varphi + \psi)(i) := \varphi(i) + \psi(i)$  in  $A_i$ .

**Definition** Ein **Kettenkomplex**  $C$  ist eine Familie  $C_i$  von abelschen Gruppen,  $i \in \mathbb{Z}$ , zusammen mit Homomorphismen  $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$  mit  $C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{n-2}$ ,  $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Wir betrachten  $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$ ,  $\partial : C \rightarrow C$  Homomorphismus mit  $\partial(x_i) = \partial_i(x_i)$  für  $x_i \in C_i$ , also  $\partial \circ \partial = 0$ ,  $\partial(C_n) \subseteq C_{n-1}$ , wobei  $C_n$  als Untergruppe von  $C$  aufgefasst wird.

**Definition** Sei  $C$  ein Kettenkomplex. Dann heißt

$$B_n(C) := \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n$$

**Gruppe der  $n$ -Ränder** und

$$Z_n(C) := \ker \partial_n \subseteq C_n$$

**Gruppe der  $n$ -Zyklen.** Wegen  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  ist  $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$ .

$$H_n(C) := Z_n(C) / B_n(C)$$

heißt die  **$n$ -te Homologiegruppe von  $C$** .

**Feststellung und Definition** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

ein Kettenkomplex  $S(X)$ .

$$H_n(X) := H_n(S(X))$$

heißt die  $n$ -te Homologiegruppe von  $X$ .

$$B_n(X) := B_n(S(X))$$

$$Z_n(X) := Z_n(S(X))$$

**Definition** Sei  $(X, Y)$  ein Paar von topologischen Räumen ( $Y \subseteq X$  Unterraum). Dann ist der **relative singuläre Kettenkomplex**  $S(X, Y)$  definiert durch

$$S_n(X, Y) := S_n(X) / S_n(Y).$$

$S_n(Y) \subseteq S_n(X)$  in natürlicher Weise: Für jedes singuläre  $n$ -Simplex in  $Y$  als singuläres  $n$ -Simplex in  $X$  mit  $\lambda : \Delta_n \rightarrow Y$  wird  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$  zugeordnet (Komposition mit Inklusionsabbildung  $Y \hookrightarrow X$ ).

$\partial_n : S_n(X, Y) \rightarrow S_{n-1}(X, Y)$  ist der durch  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  induzierte Homomorphismus, der wegen  $\partial_n(S_n(Y)) \subseteq S_{n-1}(Y)$  existiert. Es ist klar, dass  $\partial^2 : S_n(X, Y) \rightarrow S_{n-2}(X, Y)$  die Nullabbildung ist.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & S_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y) & \longrightarrow & S_{n-2}(Y) & \longrightarrow & \dots & S(Y) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \longrightarrow & S_n(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X) & \longrightarrow & S_{n-2}(X) & \longrightarrow & \dots & S(X) \\ & \downarrow \text{nat} & & \downarrow \text{nat} & & \downarrow \text{nat} & & & \downarrow \text{nat} \\ \longrightarrow & S_n(X, Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X, Y) & \longrightarrow & S_{n-2}(X, Y) & \longrightarrow & \dots & S(X, Y) \\ & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & 0 \end{array}$$

**Beispiel 1** Sei  $X \neq \emptyset$  ein topologischer Raum mit  $m$  Wegzusammenhangskomponenten. Wegen  $S_{-1}(X) = 0$  ist

$$Z_0(X) = \ker(\partial : S_0(X) \rightarrow S_{-1}(X)) = S_0(X).$$

Als Erzeugendensystem von  $S_0(X)$  können wir die Punkte  $X$  nehmen (identifiziere  $\lambda : \Delta_0 = \{0\} \rightarrow \lambda$  mit  $\lambda(0)$ ).

Für  $S_1(X)$  sind das Erzeugendensystem die Wege  $\lambda : \Delta_1 = [0, 1] \rightarrow X$  und  $\partial(\lambda) : \Delta_0 \rightarrow X$  ist

$$\partial(\lambda)(0) = \lambda F^0(0) - \lambda F^1(0) = \lambda(1) - \lambda(0).$$

$$B_0(X) = \partial(S_1(X)) = \langle \{b - a \mid a, b \in X \text{ und es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b\} \rangle$$

$$Z_0(X) = S_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x\}$$

$$B_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \text{ und } \sum_{x \in K_i} f(x) = 0$$

für jede Wegzusammenhangskomponenten  $K_i$  von  $X\}$

Also  $H_0(X) = Z_0(X) / B(X) \cong \mathbb{Z}^m$ .

**Beispiel 2** Sei  $P = \{p\}$  ein einpunktiger Raum. Dann gilt für  $n \geq 0$ :  $S_n(P) \cong \mathbb{Z}$  erzeugt die einzige Abbildung  $\lambda : \Delta_n \rightarrow \{p\}$ . Für  $\partial : S_n(P) \rightarrow S_{n-1}(P)$  gilt

$$\partial(\lambda_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda_n F^i = \sum_{r=0}^n (-1)^r \lambda_{n-1} = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

$$S_{n+1} \xrightarrow{\partial} S_n \xrightarrow{\partial} S_{n-1} \quad \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{\partial} S_0 \xrightarrow{\partial} S_{-1}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \quad \cdots \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

also für  $n \geq 2$  gerade ist  $Z_n(P) = 0$ , also  $H_n(P) = 0$ . Für  $n \geq 1$  ungerade ist  $B_n(P) = Z_n(P) = S_n(P) = \mathbb{Z}$ , also  $H_n(P) = 0$ . Für  $n < 0$  ist  $Z_n(X) = 0$ , also  $H_n(X) = 0$ .  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  klar.

**Definition** Seien  $C, D$  Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**  $\varphi : C \rightarrow D$  ist ein Homomorphismus  $\varphi : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} D_n$  mit  $\varphi(C_n) \subseteq D_n$  und  $\varphi \partial = \partial \varphi$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \varphi_{n+1} \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \varphi_{n+1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

**Proposition 6.2 (und Definition (!!))** Eine Kettenabbildung  $\varphi : C \rightarrow D$  induziert für jedes  $n$  einen Homomorphismus  $\varphi_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ .  $(\text{id}_C)_* : H_n(C) \rightarrow H_n(C)$  ist die Identität.  $(\psi\varphi)_* = \psi_* \varphi_*$  (für eine Kettenabbildung  $\psi : D \rightarrow E$ ).

**Beweis.** Wegen  $\partial\varphi = \varphi\partial$  ist klar, dass

$$\varphi(B_n(C)) = \varphi\partial(C_{n+1}) = \partial(\varphi(C_{n+1})) \subseteq \partial(D_{n+1}) = B_n(D).$$

Für  $x \in Z_n(C) \implies \partial x = 0 \implies \varphi\partial x = 0 \implies \partial\varphi x = 0 \implies \varphi(x) \in Z_n(D)$ .

Also  $\varphi(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$  und  $\varphi$  induziert einen Homomorphismus (Homomorphiesatz)

$$\varphi_* : Z_n(C) / B_n(C) \rightarrow Z_n(D) / B_n(D).$$

■



**Proposition 6.3** Sei  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  eine stetige Abbildung von Paaren. Dann induziert  $f$  eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X, Y) \rightarrow S(A, B)$  und Homomorphismen  $f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(A, B)$  mit der Eigenschaft

- (a)  $\text{id}_\bullet = \text{id}, \text{id}_* = \text{id}$
- (b)  $(fg)_\bullet = f_\bullet g_\bullet, (fg)_* = f_* g_*$

für  $g : (U, V) \rightarrow (X, Y)$  eine stetige Abbildung von Paaren.

**Beweis.**  $f_\bullet : S(X, Y) \rightarrow S(A, B)$  wird definiert durch

$$f_\bullet = f \circ \lambda : \Delta_n \rightarrow A,$$

für  $\lambda : \Delta_n \rightarrow X$  stetig. Dies definiert eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X) \rightarrow S(A)$  mit  $f_\bullet(S(Y)) \subseteq S(B)$ , also auch eine Kettenabbildung  $f_\bullet : S(X, Y) \rightarrow S(A, B)$ .

$\text{id}_\bullet = \text{id}, (fg)_\bullet = f_\bullet g_\bullet$  sind klar.  $\text{id}_* = \text{id}, (fg)_* = f_* g_*$  folgt mit Proposition 6.2. ■

**Definition** Seien  $C, D$  Kettenkomplexe,  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  Kettenabbildungen. Eine **Kettenhomotopie**  $h$  zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  ist ein Homomorphismus  $h : C \rightarrow D$ , sodass  $\varphi(c) - \psi(c) = \partial h(c) + h\partial(c)$  für alle  $c \in C$  und  $h(C_n) \subseteq D_{n+1}$ .

Die Kettenabbildung  $\varphi$  und  $\psi$  heißen **kettenhomotop**, falls es eine Kettenhomotopie zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  gibt, geschrieben  $\varphi \simeq \psi$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow & & \psi \downarrow & & \\
 & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \\
 & & \swarrow h & & \swarrow h & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

**Proposition 6.4** Seien  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  Kettenabbildungen.

- (a) Aus  $\varphi \simeq \psi$  folgt  $\varphi_* = \psi_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ .
- (b) Falls  $\alpha : B \rightarrow C, \beta : D \rightarrow E$  Kettenabbildungen sind und  $h$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\varphi$  und  $\psi$ , dann sind  $H \circ \alpha$  und  $\beta \circ h$  Kettenhomotopien zwischen  $\varphi \circ \alpha$  und  $\psi \circ \alpha$  bzw.  $\beta \circ \varphi$  und  $\beta \circ \psi$ .

**Beweis.** Sei  $[z] \in H_n(C)$ , wobei  $z \in Z_n(C)$  und  $\varphi_*([z]) = [\varphi(z)]$ , also

$$\varphi(z) - \psi(z) = \partial h(z) + h\partial(z) = \partial h(z),$$

da  $\partial(z) = 0$  (wegen  $z \in Z_n(C)$ ). Also  $\varphi_* = \psi_*$ . Damit ist (a) gezeigt. Zu (b):

$$\varphi_\alpha(c) - \psi_\alpha(c) = \partial h\alpha(c) + h\partial\alpha(c) = \partial(h\alpha)(c) + (h\alpha)\partial(c)$$

und  $h\alpha(B_n) \subseteq D_{n+1}$  klar.  $\beta h$  Kettenabbildung völlig analog. ■

**Lemma 6.5** Sei  $X$  topologischer Raum,  $i_0 : X \rightarrow X \times I, i_1 : X \rightarrow X \times I$  mit  $i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1)$ . Dann gibt es eine Kettenhomotopie  $h : S(X) \rightarrow S(X \times I)$  zwischen  $(i_0)_\bullet$  und  $(i_1)_\bullet$ , sodass für alle stetigen Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  gilt

$$hf_\bullet = (f \times \text{id})_\bullet h : S_n(Y) \rightarrow S_{n+1}(Y \times I)$$

**Satz 6.6 (Homotopieinvarianz (!!!))** Falls  $f \simeq g : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  sind, dann ist  $f_* = g_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(A, B)$ .

**Beweis.** Die Kettenhomotopie  $h : S(X) \rightarrow S(X \times I)$  induziert (nach Lemma 6.5) eine Kettenhomotopie  $\bar{h} : S(X, Y) \rightarrow S(X \times I, Y \times I)$ , da  $h(S(Y)) \subseteq S(Y \times I)$  (wähle in 6.5 für  $f$  die Einbettung  $Y \hookrightarrow X$ ). Sei  $G : (X \times I, Y \times I) \rightarrow (A, B)$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Es folgt, dass  $G_* \bar{h}$  eine Kettenhomotopie zwischen  $G_*(i_0)_* = f_*$  und  $G_*(i_1)_* = g_*$  ist, also nach 6.4  $f_* = g_*$ . ■

**Corollar 6.7** Wenn  $(X, Y) \simeq (A, B)$  ist, dann ist  $H_n(X, Y) \cong H_n(A, B)$  für jedes  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Wegen  $(X, Y) \cong (A, B)$  gibt es  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$ ,  $g : (A, B) \rightarrow (X, Y)$ , sodass  $f \circ g \simeq \text{id}$ ,  $g \circ f \simeq \text{id}$ , also nach 6.6  $g_* f_* = (gf)_* = \text{id}$  und  $f_* g_* = (fg)_* = \text{id}$ . ■

**Definition** Zwei Ketten  $c_1, c_2 \in C_n$  heißen **homolog**, falls  $c_1 - c_2 \in \partial_{n+1}(C_{n+1})$ . Also sind zwei Zyklen  $c_1, c_2 \in Z_n(C)$  homolog, falls  $[c_1] = [c_2]$  in  $H_n(C)$ .

**Definition** Eine **Sequenz von abelschen Gruppen** ist eine (eventuell endliche) Folge von abelschen Gruppen mit Gruppenhomomorphismus

$$\dots C_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

Sie heißt **exakt an der Stelle**  $C_n$ , falls  $f_{n+1}(C_{n+1}) = \ker f_n$ . Sie heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

Eine kurze exakte Sequenz ist eine der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

d.h.  $g$  surjektiv,  $f$  injektiv,  $f(A) = \ker g$ .

**Satz 6.8 (Fünferlemma)**

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & A_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann gilt:

- Falls  $f_1$  surjektiv und  $f_2, f_4$  injektiv, dann ist  $f_3$  injektiv.
- Falls  $f_5$  injektiv und  $f_2, f_4$  surjektiv sind, dann ist  $f_3$  surjektiv.
- Insbesondere folgt aus  $f_1, f_2, f_4, f_5$  Isomorphismus, dass  $f_3$  ein Isomorphismus ist.

**Beweis («Diagrammjagd»)** (a) Zu zeigen:  $\ker f_3 = 0$ .

Aus  $f_3(a_3) = 0$  folgt  $0 = \psi_3 f_3(a_3) = f_4 \varphi_3(a_3)$ , also  $\varphi_3(a_3) = 0$  (wegen  $f_4$  injektiv), also  $a_3 = \varphi_2(a_2)$  für ein  $a_2 \in A_2$  wegen  $\varphi_2(A_2) = \ker \varphi_3$  (Exaktheit bei  $A_3$ ), also

$0 = f_3(a_3) = f_3\varphi_2(a_2) = \psi_2 f_2(a_2)$ , also  $f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$  für ein  $b_1 \in B_1$  wegen  $\psi_1(B_1) = \ker \psi_2$ , also  $b_1 = f_1(a_1)$  für ein  $a_1 \in A_1$ , da  $f_1$  surjektiv, also  $f_2(a_2) = \psi_1 f_1(a_1) = f_2\varphi_1(a_1)$ , also  $a_2 = \varphi_1(a_1)$  ( $f_2$  injektiv), also  $a_3 = \varphi_2(a_2) = \varphi_2\varphi_1(a_1) = 0$ .

(b) Ähnlich. ■

**Bemerkung und Bezeichnung** Sei

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \ker f_1 & \xrightarrow{\varphi|} & \ker f_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 \\ \text{nat} \downarrow & & \downarrow \text{nat} \\ \text{koker } f_1 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{koker } f_2 \end{array}$$

wobei

$$\text{koker } f_i := B_i / f_i(A_i).$$

Denn:

$$a_1 \in \ker f_1 \implies f_1(a_1) = 0 \implies 0 = \psi f_1(a_1) = f_2\varphi(a_1),$$

also  $\varphi(a_1) \in \ker f_2$ , also  $\varphi(\ker f_1) \subseteq \ker f_2$ .

Definiere  $\bar{\psi}([b_1]) = [\psi(b_1)]$  (also  $\text{nat} \psi \psi = \bar{\psi} \circ \text{nat}$ ). Für  $a_1 \in A_1$  gilt

$$\text{nat} \psi f_1(a_1) = \underbrace{\text{nat } f_2 \varphi(a_1)}_{=0} = 0,$$

also

$$\ker(\text{nat} : B_1 \rightarrow \text{koker } f_1) = f_1(A_1) \subseteq \ker(\text{nat} \circ \psi).$$

**Lemma 6.9 (Schlangenlemma)** Sei

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen ( $\varphi_1(A_1) = \ker \varphi_2$ ,  $\psi_1(B_1) = \ker \psi_2$ ). Dann gibt es ein induziertes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & \ker f_1 & \xrightarrow{\varphi_1|} & \ker f_2 & \xrightarrow{\varphi_2|} & \ker f_3 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 \\
 & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 \\
 & \downarrow \text{nat} & & \downarrow \text{nat} & & \downarrow \text{nat} \\
 \partial & \text{koker } f_1 & \xrightarrow{\bar{\psi}_1} & \text{koker } f_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & \text{koker } f_3
 \end{array}$$

- (a) Falls  $\psi_1$  injektiv ist, dann ist die erste Zeile exakt.  
 (b) Falls  $\varphi_2 : A_2 \rightarrow A_3$  surjektiv ist, dann ist die letzte Zeile exakt.  
 (c) Falls  $\psi_1$  injektiv und  $\varphi_2$  surjektiv ist, dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\partial : \ker f_3 \rightarrow \text{koker } f_1$ , sodass für alle  $a_3 \in \ker f_3$ ,  $b_1 \in B_1$  gilt:

$$\text{nat } b_1 = \partial(a_3) \iff \exists a_2 \in A_2 : \varphi_2(a_2) = a_3 \text{ und } f_2(a_2) = \psi_1(b_1).$$

Es gilt dann ferner: Die Sequenz

$$\ker f_1 \xrightarrow{\varphi_1|} \ker f_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ker f_3 \xrightarrow{\partial} \text{koker } f_1 \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \text{koker } f_2 \xrightarrow{\bar{\psi}_2} \text{koker } f_3$$

ist exakt.  $\partial$  heißt der **Verbindungshomomorphismus**.

**Beweis.** Mäßig lang, elementar. ■

**Definition** Eine Folge von Kettenkomplexen und  $\partial$ -abbildungen

$$C^i \xrightarrow{f^i} C^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} C^{i+2} \rightarrow \dots$$

heißt **exakt**, falls für jedes  $n$  die Folge

$$C_n^i \xrightarrow{f_n^i} C_n^{i+1} \xrightarrow{f_n^{i+1}} C_n^{i+2} \rightarrow \dots$$

exakt ist.

**Satz 6.10 (und Definition (lange exakte Homologiesequenz))** Sei

$$0 \rightarrow C^1 \xrightarrow{\varphi} C^2 \xrightarrow{\psi} C^3 \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und  $\partial$ -abbildungen. Dann gibt es genau einen Homomorphismus (für jedes  $n$ )  $\partial_* : H_n(C^3) \rightarrow H_{n-1}(C^1)$ , sodass für alle  $z_1 \in Z_{n-1}^1$ ,  $z_3 \in Z_n^3$  gilt

$$[z_1] = \partial_*([z_3]) \iff \exists c_2 \in C_n^2 \text{ mit } \psi(c_2) = z_3 \text{ und } \partial(c_2) = \varphi(z_1).$$

Es gilt dann: Die Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(C^2) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C^1) \xrightarrow{\varphi_*} \dots$$

wird exakt.

**Beweis** mit Schlangenlemma. ■

**Satz 6.11 (und Definition, Homologiesequenz eines Raumpaares (!!))** Für jedes Raumpaar  $(X, Y)$  ist die zugehörige Homologiesequenz

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

exakt. Dabei sind  $i_*$  bzw.  $j_*$  von den Inklusionsabbildungen  $i : Y \rightarrow X$  bzw.  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$  induziert und  $\partial_*$  der Randoperator  $\partial_*([z]_{(X, Y)}) = [\partial z]_Y$ . Ferner hat man für eine stetige Abbildung  $f : (X, Y) \rightarrow (A, B)$  die «**Homologieleiter**» das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1}(X, Y) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \dots \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_Y)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_{n-1}(A, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(A) & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_n(A, B) \end{array}$$

**Beweis.** Nach Definition ist

$$0 \longrightarrow S(Y) \xrightarrow{i_*} S(X) \xrightarrow{\text{nat}} S(X, Y) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, also nach Satz 6.10 die lange exakte Homologiesequenz. Die Kommutativität ist des Diagramm ist direkt zu sehen. ■

Analog kann man von einem Raumtripel ausgehen  $Z \subseteq Y \subseteq X$ . Dann erhält man die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S(Y, Z) \xrightarrow{i_*} S(X, Z) \xrightarrow{j_*} S(X, Y) \longrightarrow 0$$

wobei  $i : (Y; Z) \rightarrow (X, Z)$ ,  $j : (X, Z) \rightarrow (X, Y)$ . Dann erhalten wir die exakte Homologiesequenz des Tripels

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y, Z) \xrightarrow{i_*} H_n(X, Z) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

**Satz (!!)** Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  stetig. Dann gilt  $\partial_* f_* = (f|_A) \partial_*$ , wobei  $f|_A : A \rightarrow B$  und

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B) \\ \partial_* \downarrow & (f|_A)_* & \downarrow \partial_* \\ H_{n-1}(A) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

**Ausschneidungssatz** Sei  $X$  topologischer Raum,  $A \subseteq X$ . Falls  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$  mit  $\bar{U} \subseteq \mathring{A}$  ist, dann induziert die Inklusionsabbildung  $(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i} (X, A)$  einen Isomorphismus  $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i_*} H_n(X, A)$ .

**Beweis** lang. ■

**Satz** Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt

$$H_1(X) \cong \pi_1(X) / K(\pi_1(X)).$$

**Satz** Für  $n \geq 1$ :

$$H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n \text{ oder } m = 0 \\ 0 & m \neq n \text{ und } m \neq 0. \end{cases}$$

## Index

- $T_1$ -Raum, 6
- $T_2$ -Raum, 6
- $T_3$ -Raum, 6
- $T_4$ -Raum, 6
- $T_{3a}$ -Raum, 6
- $k$ -Simplex, 32
- $n$ -Mannigfaltigkeit, 17
- $n$ -Zelle, 16
- $n$ -dimensional (CW-Raum), 65
- $r$ -fach abgeleitete Komplex, 45
- (abstrakte) simpliziale Abbildung, 37
- (abstrakter) simplizialer Komplex, 34
  - Dimension, 34
- (geometrischer) simplizialer Komplex, 32
- äquivalent, 47
  1. Abzählbarkeitsaxiom, 4
  2. Abzählbarkeitsaxiom, 4
- abgeleitete Komplex, 44
- abgeschlossen, 5
- abgeschlossene Menge, 3
- Abschluss, 5
- affin unabhängig, 32
- Anfangspunkt, 10
  
- baryzentrische Unterteilung, 44
- Basis, 3
- Baum, 50
  - aufspannenden Baum, 50
- Berührungspunkt, 5
  
- Cayley-Diagramm, 30
- charakteristische Abbildung, 65
- Coprodukt, 31
- CW-Raum, 65
- Deformationsretrakt, 22
  
- Deformationsretraktion, 22
- dicht, 5
- Dimension, 33
- direkte Summe, 71
  
- Einbettung, 5
- einfach zusammenhängend, 27
- Einhängung, 19
- Einpunktvereinigung, 19
- elementarer Kollaps, 47
- endlich präsentierbar, 30
- endliche Präsentation, 30
- endlicher CW-Raum, 65
- Endpunkt, 10
- Euler-Charakteristik, 40, 64, 66
- exakt, 75, 77
  
- Fläche, 17
- freie abelsche Gruppe, 70
- freie Gruppe, 28
- Fundamentalgruppe, 25
  
- Gerüst, 65
- geschlossener Rand (Mannigfaltigkeit), 17
- geschlossener Weg, 24
- Gruppe der  $n$ -Ränder, 71
- Gruppe der  $n$ -Zyklen, 71
  
- homöomorph, 6
- Homöomorphismus, 5
- homolog, 75
- Homologiegruppe, 71, 72
- Homologieleiter, 77
- homotop, 20, 22
- homotop relativ, 22

- Homotopie, 20
- homotopie-äquivalent, 20, 22
- Homotopie-Äquivalenz, 20
- Homotopietyp, 20
- identifizierende Abbildung, 14
- in Zellen zerlegter Raum, 65
- innerer Punkt, 5
- inverse Kantenweg, 47
- Join, 37
- Kantengruppe, 48
- Kantenschleife, 47
- Kantenweg, 47
- Kegel (Quotientenraum), 18
- Kettenabbildung, 73
- kettenhomotop, 74
- Kettenhomotopie, 74
- Kettenkomplex, 71
- Klebeabbildung, 65
- kollabierbar, 47
- kombinatorisch isomorph, 34
- Kommutatorfaktorgruppe, 63
- kompakt, 8
  - folgenkompakt, 8
  - quasikompakt, 8
- kontrahierbar, 22
- Konvergenz (Folge), 7
- konvexe Hülle, 32
- Lebesgue-Zahl, 46
- Link, 41
- Maschenweite, 45
- metrisierbar, 9
- $n$ -Zelle, 65
- natürliche Realisierung, 35
- normal, 6
- offen, 5
- offene Überdeckung, 8
- offene Kern, 5
- offene Menge, 3
- Paar von Räumen, 22
- Produkt, 47
- Produktraum, 12
- Produkttopologie, 12
- Quotientenraum, 13
- Rand, 5
- Rand (Mannigfaltigkeit), 17
- Randabbildung, 71
- Randkomplex, 36
- Raumpaar, 22
- Realisierung, 34
- regulär, 6
- relative Innere, 34
- relative singuläre Kettenkomplex, 72
- Retrakt, 22
- Retraktion, 22
- Schwerpunkt (Simplex), 43
- Seitenabbildung, 70
- Sequenz, 75
- Simplex
  - Dimension, 32
  - eigentliche Seite, 32
  - Polyeder, 33
  - Seite, 32
- Simplexes
  - Ecken, 32
- simpliziale Abbildung, 36
- simpliziale Approximation, 42
- simpliziale Umgebung, 41
- simpliziales Paar, 36
- singuläre Kettengruppe, 70
- singuläres  $n$ -Simplex, 70
- Skelett, 36



- starke Deformationsretraktion, 22
- starker Deformationsretrakt, 22
- Stern, 41
- Sternüberdeckung, 45
- stetig, 5
- Subbasis, 4
- Summe, 13
- Topologie, 3
  - erzeugte, 4
  - feiner, 5
  - Finaltopologie, 13
  - gröber, 5
  - Identifizierungstopologie, 14
  - initiale, 12
  - Unterraumtopologie, 3
- topologisch äquivalent, *siehe* homöomorph
- topologischer Raum, 3
  - triangulierbar, 33
- Träger, 33
- Triangulierung, 33
- Umgebung (eines Punktes), 3
- Umgebungsbasis, 4
- Umgebungsfilter, 4
- unberandet (Mannigfaltigkeit), 17
- Unterkomplex, 36
- Verbindungshomomorphismus, 77
- vollständig regulär, 6
- Weg, 10
- wegzusammenhängend, 10
  - lokal wegzusammenhängend, 11
- Wegzusammenhangskomponente, 11
- zugehörige Homologiesequenz, 77
- zulässig, 61
- zusammenhängend, 10
  - lokal zusammenhängend, 11
- Zusammenhangskomponente, 11