Formen des starken & schwachen Gesetzes der großen Zahlen

Robert Baumgarth[1]

[1]Fakultät für Mathematik und Informatik, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Germany

13. Juli 2022

1 Motivation

Werfen wir eine faire Kopf-Zahl-Münze, so erwarten wir, dass Kopf und Zahl gleichwahrscheinlich sind. Betrachten wir insbesondere das arithmetische Mittel genügend vieler solcher Versuche, so erwarten wir im Mittel immer noch, dass Kopf und Zahl gleichwahrscheinlich auftreten. Für ein solches Bernoulli-Experiment (im i^{ten} Schritt) $X_i \sim \mathrm{B}(p)$, mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, kennen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}X_i$, der gerade gegeben ist als $\mathbb{E}X_i = p$, und haben uns schon näher mit dem asymptotischen Verhalten beschäftigt (cf. Korollar 2.3). Allgemeiner können wir die Frage stellen, ob das arithmetische Mittel $\overline{X}_n := \frac{1}{n}S_n$ der Summe $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, abzählbar vieler ZVen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für $n \in \mathbb{N}$ einen Grenzwert μ annimmt, und ob und unter welchen Bedingungen dieser ebenfalls mit dem Erwartungswert $\mathbb{E}X_i$ übereinstimmt, formal:

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \mu. \tag{1.1}$$

Die **Gesetze der großen Zahlen** beschreiben das asymptotische Verhalten statistischer Beobachtungen, i.e. das Ausführen desselben Experiments viele Male. Dabei nähert sich der Stichprobenmittelwert oder das arithmetische Mittel immer mehr dem eigentlichen Mittelwert an. Das **starke Gesetz der großen Zahlen (SLLN)** (cf. Theorems 3.3, 3.5 und 4.1) beschreibt die Konvergenz des Grenzwertes (1.1) $\mathbb{P}$-fast sicher, i.e. mit Wahrscheinlichkeit 1; hingegen das **schwache Gesetz der großen Zahlen (WLLN)** (cf. Korollar 2.3 und Theorem 2.1) die $\mathbb{P}$-stochastische Konvergenz. Da fast sichere die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert, folgt aus jedem SLLN sofort ein WLLN.
Sind beispielsweise die $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige ZVen mit demselben Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}X_i$ und endlicher Varianz, wird der Grenzwert in (1.1) in Wahrscheinlichkeit angenommen, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0: \qquad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Denn offensichtlich gilt nach der Chebyshev-Markov-Ungleichung (cf. § 2)

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wären die $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right)$ summierbar[1], dann könnten wir nach dem Lemma von Borel-Cantelli die fast sichere Konvergenz schließen; leider ergibt sich nur die Schranke $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leqslant C/n$,

[1]Eine Folge von Elementen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem normierten linearen Raum X heißt **summierbar**, wenn $\sum_{i=1}^N x_i$ gegen ein Element $x \in X$ konvergiert für $N \to \infty$. Uns interessiert hier, dass für alle Ereignisse $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, also die $\mathbb{P}(A_n)$ summierbar sind, i.e. $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$.

die gegen Null konvergiert, aber nicht summierbar ist. Es stellt sich jedoch heraus, dass sie längs einer *Teilfolge* n^2 summierbar ist: ein Ansatz zum Beweis eines SLLN besteht darin, zu zeigen, dass $|S_k - S_{n^2}|$ nicht zu groß wird für jedes $n^2 \leqslant k < (n+1)^2$.

⚠ Das *WLLN* sagt, dass für n groß genug, das Mittel $\overline{X}_n$ nahe dem Mittelwert $\mu = \mathbb{E}X_i$ liegt. Insbesondere kann das Ereignis $\left\{\left|\overline{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right\}$ *unendlich oft* auftreten, i.e. nicht notwendigerweise $\left|\overline{X}_n - \mu\right| \neq 0$ für alle n. Das SLLN besagt hingegen, dass ebendies fast sicher nicht geschieht.

2 WLLN - Bernoulli 1713, Chebyshev 1867, Khintchin 1929

Der erste Grenzwertsatz gilt «schwach»[2] für Summen unabhängiger bzw. unkorrelierter ZVen: das schwache Gesetz der großen Zahlen - **WLLN** (*weak law of large numbers*) - ist im Grunde nur eine Anwendung der Chebyshev-Markov-Ungleichung und geht auf Chebyshev zurück:

Für eine ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ bzw. $X \in \mathrm{L}^2(\mathbb{P})$, gilt

$$\mathbb{P}\left(|X| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\,|X|\,,$$
$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}X| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}X|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}X.$$

Allgemeiner gilt für jedes $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ streng monoton wachsend und $\varepsilon > 0$, dass

$$\mathbb{P}\left(|X| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(\varepsilon)},$$

denn offensichtlich ist

$$\mathbb{E}g(|X|) \geqslant \mathbb{E}\left(g(|X|)\mathbb{1}_{\{|X|>\varepsilon\}}\right) \geqslant g(\varepsilon)\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{|X|>\varepsilon\}} \geqslant g(\varepsilon)\mathbb{P}(|X| > \varepsilon),$$

da $g(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$.

Theorem 2.1 (Chebyshev; WLLN). *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) abzählbar viele, paarweise unkorrelierte ZV in $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$, i.e. $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}X_i = 0,$$

dann

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > \varepsilon\right) = 0, \tag{2.1}$$

i.e. $(X_i)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt dem **schwachen Gesetz der großen Zahlen (WLLN)**.

Beweis. Da die $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unkorreliert sind, gilt nach dem Satz von Bienaymé, $\mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{V}X_i$. Aufgrund der Chebyshev-Markov-Ungleichung somit

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right|^2 > (n\varepsilon)^2\right) \leqslant \frac{1}{(n\varepsilon)^2}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right|^2$$
$$\stackrel{\text{def}}{\underset{\mathbb{V}}{=}} \frac{1}{(n\varepsilon)^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \stackrel{\text{Bienaymé}}{=} \frac{1}{(n\varepsilon)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}X_i \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \blacksquare$$

[2] Im Sinne, dass Konvergenz in Wahrscheinlichkeit aus fast sicherer Konvergenz folgt.

Bemerkung 2.2. Der Beweis von Theorem 2.1 benötigt nur die *Unkorreliertheit* der ZVen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (→ Bienaymé) und benötigt *keine* (paarweise) Unabhängigkeit der ZVen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Korollar 2.3 (Bernoullis WLLN). *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) iid ZVen und $X_1 \sim \mathrm{B}(p)$. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Beweis. Wegen $|X_i| \leqslant 1$ ist $X_i \in \mathrm{L}^2(\mathbb{P})$. Nach Theorem 2.1 folgt unmittelbar

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}X_i \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2} n\mathbb{V}X_1 = \frac{1}{n}\mathbb{V}X_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 2.4. (a) Zur Interpretation der Aussage von Korollar 2.3: Sei X_i das Ergebnis des i^{ten} Münzwurfs einer p-q-Münze.

- ▷ $S_n(\omega)/n$ ist die *beobachtete* relative Häufigkeit der Erfolge.
- ▷ p ist die *theoretisch* erwartete Häufigkeit der Erfolge.
- ▷ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beobachteten und die theoretischen Werte höchstens um den Fehler ε abweichen.

Das WLLN wird somit häufig zur Approximation von Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten genutzt.

(b) Achtung!

- ▷ Korollar 2.3 sagt **nicht**, dass $S_n(\omega)/n \to p$ für eine feste Wurffolge ω gilt.
- ▷ Korollar 2.3 sagt auch **nicht**, dass nach (bspw.) 1000 aufeinanderfolgenden «0» das Auftreten einer «1» wahrscheinlicher ist.

Eine Version des WLLN geht auch Khintchin (1929) zurück: Mit Hilfe eines *Stutzungstricks* (cf. → Etemadis Beweis des SLLN) konnte er die optimale Version des WLLN beweisen. Dieselbe Technik kann zum Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen verwendet werden.

Theorem 2.5 (Khintchin; WLLN). *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) abzählbar viele, paarweise unabhängige und identisch verteilte ZV in $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$, i.e. $\mathbb{E}|X_i| < \infty$. Dann genügt die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dem WLLN (2.1).*

Die folgende Version des WLLN folgt natürlich umgehend aus dem SLLN, Theorem 4.1, kann aber auch direkt bewiesen werden.

Theorem 2.6 ($\mathrm{L}^2/\mathbb{P}$-Version des WLLN). *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) abzählbar viele, paarweise unabhängige ZV in $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$, i.e. $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ mit endlicher Varianz $\sigma^2 := \mathbb{V}X_1 < \infty$. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}X_1 =: \mu \qquad \mathbb{P}\text{-stochastisch und in } \mathrm{L}^2.$$

Beweis. Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zeigt man analog zu dem Beweis von Theorem 2.1 mit der Chebyshev-Markov-Ungleichung. Da L^2-Konvergenz jedoch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert, genügt es die Konvergenz in L^2 zu beweisen. Da die ZVen identisch verteilt sind, gilt insbesondere $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1$ und $n\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}S_n$. Damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right)^2 &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(S_n - n\mathbb{E}X_1\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(S_n - \mathbb{E}S_n\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}S_n = \frac{1}{n}\overbrace{\mathbb{V}X_1}^{=\sigma^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

gilt nach dem Satz von Bienaymé, $\mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{V}X_i = n\mathbb{V}X_1$, da die $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig. ∎

3 SLLN

Lemma 3.1 (Borel-Cantelli-Lemma). *Es sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$.

(a) Es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(A_n \textit{ für unendlich viele } n) = 0.$$

(b) Wenn die A_n *paarweise unabhängig sind, dann gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(A_n \textit{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli 3.1 folgt eine einfache Version des **starken Gesetzes der großen Zahlen (SLLN)**.

Theorem 3.2 (L^4-SLLN). *Es seien* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^4(\mathbb{P})$ *iid ZVen mit* $\mathbb{E}X_1 = \mu$ *und sei* $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. *Dann gilt*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}X_1 = \mu.$$

Beweis. Da $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und in $\mathrm{L}^4(\mathbb{P})$ sind, gilt

$$\mu = \mathbb{E}X_i, \qquad (X_i - \mu)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^4(\mathbb{P}) \text{ iid}, \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0.$$

Ohne Einschränkung können wir $\mu = 0$ annehmen (sonst setze $\tilde{X}_i := X_i - \mathbb{E}X_i$). Durch Ausmultiplizieren

$$\mathbb{E}S_n^4 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4 = \mathbb{E}\left(\sum_{i,k,l,m} X_iX_kX_lX_m\right) = \sum_{i,k,l,m}\mathbb{E}\left(X_iX_kX_lX_m\right).$$

Da die X_i unabhängig sind, folgt

$$\mathbb{E}\left(X_iX_kX_lX_m\right) = \begin{cases} \mathbb{E}X_i^4 & i = k = l = m, \qquad (a) \\ \mathbb{E}X_i^2\,\mathbb{E}X_l^2 & i = k \neq l = m, \qquad (b) \\ \underbrace{\mathbb{E}X_i}_{=0}\,\mathbb{E}\left(X_kX_lX_m\right) & \text{sonst.} \qquad (c) \end{cases}$$

Offensichtlich tritt der Fall (a) n-mal und der Fall (b) $\binom{4}{2}n(n-1)$-mal auf, i.e. für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}S_n^4 \leqslant n\mathbb{E}X_1^4 + 6n(n-1)\left(\mathbb{E}X_1^2\right)^2 \leqslant \kappa\, n^2.$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt für beliebige $\varepsilon > 0$, dass

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}S_n^4}{n^4\varepsilon^4} \leqslant \frac{\kappa}{n^2\varepsilon^4} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon\right) \leqslant \frac{\kappa}{\varepsilon^4}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Mit Hilfe des Borel-Cantelli-Lemma, Lemma 3.1 (a), folgt nun $\mathbb{P}\left(\left|S_n\right| > n\varepsilon \text{ für unendlich viele } n\right) = 0$, und daher ist

$$\Omega_\varepsilon := \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|S_n\right|}{n} \leqslant \varepsilon\right\}$$

für jedes feste $\varepsilon > 0$ eine Menge mit vollem Maß. Es gilt

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\left|S_n\right|}{n} = 0\right\} \overset{\left|S_n\right| \geqslant 0}{=} \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|S_n\right|}{n} = 0\right\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_{1/m} =: \Omega_0,$$

und weil Ω_0 der Schnitt *abzählbar vieler* Mengen mit Maß 1, gilt $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, und die Behauptung folgt. ■

Theorem 3.3 (L^1-SLLN; Kolmogorov 1933, Etemadi 1981). *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{L}^1(\mathbb{P})$ paarweise unabhängige, identisch verteilte, reelle ZVen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1 \qquad \textit{fast sicher.}$$

i. e. mit $\mathbb{E}X_1 =: \mu$ und sei $S_n := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}X_1 = \mu,$$

Dass die Integrabilitätsbedingung $X_n \in \mathsf{L}^1(\mathbb{P})$ in Theorem 3.3 optimal ist, werden wir im nächsten Theorem 3.5 zeigen. Dafür benötigen wir das folgende

Lemma 3.4. *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{L}^1(\mathbb{P})$ paarweise unabhängige, identisch verteilte, reelle ZVen, so dass $\mathbb{E}\left|X_i\right| = \infty$. Dann gilt, für $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dass*

$$\mathbb{P}\left(\lim_n S_n/n \textit{ existiert und ist endlich}\right) = 0.$$

Mit anderen Worten: Existiert der Limes

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \tag{3.1}$$

und ist endlich, dann gilt $\mathbb{E}\left|X_i\right| < \infty$.

Beweis. Wir definieren die Mengen

$$C := \left\{ L := \lim_n S_n/n \text{ existiert und ist endlich} \right\},$$
$$\Omega_0 := \left\{ |X_i| \geqslant n \text{ für unendlich viele } n \right\}.$$

Für $\omega \in C$ gilt

$$\frac{X_{n+1}(\omega)}{n+1} = \frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \frac{S_n(\omega)}{n+1} = \underbrace{\frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1}}_{\to L} - \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \underbrace{\frac{S_n(\omega)}{n}}_{\to L}.$$

Das zeigt, dass für alle $\omega \in C$ gilt $\lim_n X_n(\omega)/n = 0$, also ist $C \cap \Omega_0 = \emptyset$ und

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap \Omega_0) + \mathbb{P}(C \setminus \Omega_0) \leqslant \mathbb{P}(\Omega_0^c) = 0. \qquad \blacksquare$$

Theorem 3.5. *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ paarweise unabhängige, identisch verteilte, reelle ZVen, für die der Grenzwert (3.1) f.s. existiert und endlich ist. Dann ist $X_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ und $L = \mathbb{E}X_1$ fast sicher.*

Beweis. Offensichtlich ist

$$L(\omega) := \lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}$$

eine ZV. Nach Lemma 3.4 gilt dann $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Nach dem SLLN, Theorem 3.3, gilt somit

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \overset{\text{SLLN}}{=} \mathbb{E}X_1 \text{ f.s.}$$

Insbesondere ist L f.s. eine Konstante. $\blacksquare$

Zusammenfassend (aus Gleichung (2.1) und Theorem 3.5) haben wir somit die wahrscheinlich meist genutzte Version des SLLN für iid ZVen gezeigt:

Theorem 3.6. *Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid ZVen und $S_n := \sum_{i\leqslant n} X_i$. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \mu$$

genau dann, wenn $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, wobei $\mu = \mathbb{E}X_1$.

Daraus folgen unmittelbar zwei wichtige Konsequenzen, die in der Statistik ständig genutzt werden.

Korollar 3.7. *Es sei $\overline{X}_n := S_n/n$, $\mu := \mathbb{E}X_1$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}X_1$. Dann gilt*

$$(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{X}_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$$
$$(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{P}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_n - \overline{X}_n\right)^2 \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma^2$$

4 Kolmogorovs klassisches L^2-SLLN

Kolmogorov hat das SLLN 1930/1933 für *unabhängige und identisch verteilte* ZVen in $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ gezeigt. Die Beweisidee zeigt dabei insbesondere eine $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$-Version des SLLN, bei der die ZVen nicht identisch verteilt sein müssen:

Theorem 4.1. *Es seien $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängige, reelle ZVen. Dann*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{V}Y_i}{i^2} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \mathbb{E}Y_i\right) = 0 \qquad \text{f.s.}$$

Zum Beweis benötigen wir kleinere Zwischenresultate, die für sich genommen von Interesse sind.

Lemma 4.2 (Lévy). *Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige ZVen. Dann gilt*

$$S_n \text{ konvergiert f.s.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_n \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.}$$

Beweis. $\Longleftarrow$ Klar, da f.s. Konvergenz die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert.

$\Longrightarrow$ Hier benötigen wir die Unabhängigkeit und → Etemadis Maximalungleichung. ■

Korollar 4.3 (Kolmogorov). *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängige, relle ZVen. Dann gilt*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{V}X_i < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} (X_i - \mathbb{E}X_i) \qquad \text{konvergiert f.s.}$$

Beweis. Für $c_i = \text{const.}$ ist die Folge $(X_i - c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls unabhängig; und es gilt $\mathbb{V}X_i = \mathbb{V}(X_i - c_i)$. Ohne Einschränkung können wir $\mathbb{E}X_i = 0$ annehmen. Für $m < n$ gilt

$$\mathbb{E}(S_n - S_m)^2 = \mathbb{V}(S_n - S_m) \overset{\text{Bienaymé}}{=} \sum_{i=m+1}^{n} \mathbb{V}X_i \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Da $\mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $S_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\mathbb{P})} S$, also auch in Wahrscheinlichkeit. Mit Lemma 4.2 somit auch fast sicher. ■

Schließlich zitieren wir ein wohl bekanntes

Lemma 4.4 (Kroneckers Lemma). *Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \subset (0,\infty)$ eine monoton wachsende Folge mit $a_i \uparrow \infty$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Folge. Dann gilt für die Partialsummen $s_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ($n \in \mathbb{N}$),*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i}{a_i} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{a_n} = 0.$$

Nun können wir Theorem 4.1 beweisen.

Beweis von Theorem 4.1. Wir wenden Korollar 4.3 auf die Folge $X_i := Y_i/i$ an, dann erhalten wir wegen $\mathbb{V}Y_i = \mathbb{V}(Y_i - \underbrace{\mathbb{E}Y_i}_{\text{const}})$, dass

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{Y_i - \mathbb{E}Y_i}{i} \qquad \text{f.s. konvergiert.}$$

Mit Lemma 4.4 (setze $a_i = 1$) folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \mathbb{E}Y_i\right) = 0 \qquad \text{f.s.}$$ ■

Kolmogorovs Beweis des SLLN für iid ZVen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ folgt nun mit der bekannten *Stutzungstechnik* aus Etemadis Beweis.