Geometrische Maßtheorie

Prof. Dr. F. Schuricht

Robert Baumgarth

TU Dresden

Fakultät Mathematik

Institut für Analysis

Mitschrift

WS 2011/12

25. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Maßtheorie

1.1 Maße und messbare Funktionen

Sei X Menge, $\mathcal{P}(X)$ Potenzmenge und eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf X falls

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) $\mu(A) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ falls $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ (1)

Hinweis: heißt in der Regel *äußeres Maß*.

Offenbar gilt für Maß μ:

$$\mu(A) \leqslant \mu(B) \text{ falls } A \subset B \subset X \tag{2}$$

Sei μ Maß auf X, $A \subset X$. Dann heißt $\mu \llcorner A : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit

$$(\mu \llcorner A)(B) = \mu(B \cap A) \quad \forall B \subset \mathcal{P}(X)$$

Einschränkung von μ auf A.

Offenbar ist $\mu \llcorner A$ selbst ein Maß auf X.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra** falls

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow A_k \in \mathcal{A}$

Man sagt, eine Eigenschaft gilt **μ-fast überall** (μ-f.ü.) auf X, falls $A \subset X$ mit $\mu(A) = 0$ existiert, so dass die Eigenschaft für alle $x \in X \setminus A$ gilt.

Für ein Maß μ auf X heißt $A \subset X$ **μ-messbar**, falls

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\mu(B \cap A^c)} \quad \forall B \subset X \tag{3}$$

Beachte: Im Allgemeinen «$\leqslant$».

g-01 **Theorem 1.1 (messbare Mengen)** *Sei μ Maß auf X. Dann*

(1) $\mu(A) = 0 \Longrightarrow A$ *μ-messbar*

(2) A *μ-messbar,* $B \subset X \Longrightarrow A$ *μ/B-messbar*

(3) Menge der μ-messbaren Mengen ist eine σ-Algebra (insbesondere $\varnothing, X, A^c, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ μ-messbar, falls A, A_k μ-messbar)

(4) A *μ-messbar,* $B \subset X \Longrightarrow \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$

(5) (A_k) *μ-messbar, paarweise disjunkt* $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_k \mu(A_k)$ *(σ-additiv)*

(6) (A_k) *μ-messbar,* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Longrightarrow \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_k A_k\right)$

(7) (A_k) *μ-messbar,* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \mu(A_1) < \infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_k A_k\right)$

Beweis. (1) $\forall B \subset X : \mu(B) \overset{(1)}{\leqslant} \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leqslant \underbrace{\mu(A)}_{=0} + \mu(B) = \mu(B)$

(2) Folgt direkt aus (3)

(3) (3) liefert: $\varnothing, X$ μ-messbar, A^c μ-messbar, falls A μ-messbar. Seien A_k μ-messbar, $B \subset X \Longrightarrow \mu(B) \overset{(2)}{\leqslant} \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))$ und

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1)\\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2)\\ &\overset{(2)}{\geqslant} \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))\end{aligned}$$

$\Longrightarrow A_1 \cup A_2$ μ-messbar $\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \bigcup_k A_k$ μ-messbar, Komplementärbildung $\Longrightarrow \bigcap_k A_k$ μ-messbar

(4) $\mu(B) \overset{(3)}{=} \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(A \cup B) \overset{(3)}{=} \mu((A \cup B) \cap A) + \mu((A \cup B) \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Beides ergibt Behauptung.

(5) Sei $B_m := \bigcup_{k=1}^m A_k$, dann gilt $\mu(B_{m+1}) \overset{(3)}{=} \mu(B_{m+1} \cap A_{m+1}) + \mu(B_{m+1} \setminus A_{m+1}) = \mu(A_{m+1}) + \mu(B_m)$

$$\overset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^m \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) \overset{(2)}{\leqslant} \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$$

Also für $m \to \infty$ überall «=», Behauptung.

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &\overset{(5)}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{j=2}^k \mu(A_j \setminus \mu(A_{j-1})\right)\\ &= \mu(A_1) + \sum_{j=2}^\infty \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \overset{(5)}{=} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_k \mu(A_1 \setminus A_k) &\overset{(6)}{=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_1 \setminus A_k\right)\\ &\overset{(2)}{\geqslant} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_k A_k\right)\end{aligned}$$

Wegen $\mu\left(\bigcap_k A_k\right) \leqslant \mu(A_m) \forall m \overset{m\to\infty}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

(8) $B \subset X, B_m := \bigcup_k A_k$ μ-messbar $\forall m$. O.E. sei $\mu(B) < \infty$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \mu(B) \overset{(2),(3)}{=} (\mu \llcorner B)(B_k) + (\mu \llcorner B)(B \setminus B_k)\\ &\overset{k\to\infty,(6),(7)}{\Longrightarrow} \quad = \mu\left(B \cap \bigcap_k A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_k A_k\right)\\ &\Longrightarrow \bigcup_k A_k \ \mu\text{-messbar} \Longrightarrow \text{Behauptung.}\end{aligned}$$

■

Definition $A \subset X$ heißt **σ-endlich** bzgl. Maß μ, falls $A = \bigcup_k B_k$, wobei B_k μ-messbar und $\mu(B_k) < \infty \forall k$.
Menge $\mathcal{B} = \mathcal{B}^n \subset mP(\mathbb{R}^n)$ der **Borelmengen** des $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste σ-Algebra in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, die alle offenen Mengen enthält. (Beachte: Abgescholossen statt offen äquivalent, somit alle offenen und abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{B}$)
Maß μ auf X heißt **regulär**, falls $\forall A \subset X \exists B$ μ-messbar: $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.
Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt

(i) **Borelmaß**, falls alle Borelmengen μ-messbar sind.
(ii) **Borel-regulär**, falls μ Borelmaß und $\forall A \subset X \exists B \in \mathcal{B} : A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.
(iii) **Radonmaß**, falls μ Borel-regulär und $\mu(K) < \infty$, wo $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

g-02 **Theorem 1.2** *Sei μ ein reguläres Maß auf X und $A_1 \subset A_2 \subset ....$ Dann ist*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$

Beachte: A_k müssen nicht messbar sein!

Beweis. μ regulär $\Longrightarrow \exists C_k$ messbar: $A_k \subset C_k$ und $\mu(A_k) = \mu(C_k) \forall k$. Sei $B_k := \bigcap_{j\geqslant k} C_j \Longrightarrow$ $A_k \subset B_k \subset C_k$, B_k messbar mit $B_1 \subset B_2 \subset ...$, Also $\Longrightarrow \mu(B_k) = \mu(A_k)$ Damit

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_k A_k\right) \overset{A_j \subset \bigcup_k A_k}{\geqslant} \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. ■

g-03 **Theorem 1.3** *Sei μ Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, $\mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu \llcorner A$ Radonmaß.*

Beweis. Offenbar ist $(\mu \llcorner A)(K) < \infty$ für K kompakt. $\mu \llcorner A$ Borelmaß, da μ-messbare Mengen auch $(\mu \llcorner A)$-messbar. Zu Zeigen: $\mu \llcorner A$ Borel-regulär $\Longrightarrow$ vgl. Literatur. ■

g-04 **Theorem 1.4 (Approximation durch offene und kompakte Mengen)** *Sei μ Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann*

(i) $A \subset \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ offen}\}$.
(ii) $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar $\Longrightarrow \mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$.

g-05 **Lemma 1.5** *Sei μ Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ Borelmenge. Dann*

(i) $\mu(B) < \infty \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists C \subset B$ abgeschlossen: $\mu(B \setminus C) < \infty$.
(ii) μ Radonmaß $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U \supset B$ offen: $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$.

Beweis. vgl. Literatur. ■

g-06 **Theorem 1.6 (Catatheodory-Kritierium)** *Sei μ Maß auf $\mathbb{R}^n$. Dann:*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0 \Longrightarrow \mu$ Borelmaß.

Beweis. vgl. Literatur. ■

Definition Sei μ Maß auf einer Menge X und sei Y ein topologischer Raum (z.B. metrischer Raum). Die Funktion $f : X \to Y$ heißt **μ-messbar**, falls $f^{-1}(U)$ μ-messbar für alle $U \subset Y$ offen.

Hinweis: $\mathcal{M} := \left\{A \subset Y \mid f^{-1}(A)\, \mu - \text{messbar}\right\}$ ist eine σ-Algebra, d.h. $\mathcal{M}$ enthält Borelmengen, falls f μ-messbar und $Y = \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : X \to [-\infty, \infty]$ heißt σ-endlich bzgl μ, falls f μ-messbar und $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ σ-endlich bzgl. μ.

g-07 **Theorem 1.7 (messbare Funktionen)** *Sei μ ein Maß auf X. Dann*

(i) $f, g : X \to \mathbb{R}$ *μ-messbar* $\Longrightarrow$ $f \pm g$, fg, $|f|$, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ *μ-messbar und* $\frac{f}{g}$ *μ-messbar, falls $g \neq 0$ auf X.*

(ii) $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ *μ-messbar* $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\liminf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\limsup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *μ-messbar.*

(iii) $f : X \to [-\infty, \infty]$ *μ-messbar* $\Longleftrightarrow f^{-1}[-\infty, a)$ *μ-messbar* $\forall a \in \mathbb{R}$
$\Longleftrightarrow f^{-1}[-\infty, a]$ *μ-messbar* $\forall a \in \mathbb{R}$

Beweis. vgl. Literatur. ■

g-08 **Theorem 1.8** *Sei $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar. Dann*

$$\exists A_k \subset X\ \mu\text{-messbar mit } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \quad \forall x \in X$$

Beweis. Sei $A_1 := \{x \in X \mid f(x) \geqslant 1\}$ und

$$A_k := \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \geqslant \frac{1}{k} + \sum_{j \leqslant k-1} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{A_j}(x) \right\} \quad \forall k \geqslant 2, \tag{4}$$

offenbar A_k μ-messbar.

$$\Longrightarrow f(x) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{A_j}(x) \forall x \in X \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \forall x \in X \tag{5}$$

Also

$$f(x) = \infty \Longrightarrow x \in A_k \forall k \Longrightarrow \text{Behauptung}$$
$$f(x) = 0 \Longrightarrow x \notin A_k \forall k \Longrightarrow \text{Behauptung}$$
$$0 < f(x) < \infty \Longrightarrow x \notin A_k \text{ für } \infty \text{ viele } k \text{ (sonst } f(x) \geqslant \infty \text{ nach (5)}$$
$$\Longrightarrow f(x) < \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \mathbb{1}_{A_j}(x) \text{ für diese } k$$

Da $s_l := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \mathbb{1} A_j(x)$ wachsend folgt mit (5), Behauptung $\left(\text{Beachte: } 0 \leqslant f(x) - s_l < \frac{1}{l}\right)$. ■

Hinweis: $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}$ mit A_k gemäß (4) gilt für beliebige Funktion f ist im Allgemeinen A_k eventuell nicht μ-messbar.

1.2 Sätze von Lusin und Egarov

g-09 **Theorem 1.9 (Fortsetzung stetiger Funktionen)** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Longrightarrow$ es existiert eine stetiger Fortsetzung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von f (d.h. $f = \overline{f}$ auf K).*

g-10 **Lemma 1.10 (Weierstraßscher M-Test)** *Seien $g_K : M \to X$ Funktionen auf einer Menge M, X ein Banachraum, $\|g_k(x)\| \leqslant c_k \, \forall x \in M$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k$ konvergent $\Longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf M.*

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

Beweisskizze zu Theorem 1.9. Sei $\{y_k \in K \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in K. Definiere

$$u_k(x) := \max\left\{2 - \frac{|x-y|}{\operatorname{dist}(x,K)}, 0\right\} \quad \forall x \in K^c, k \in \mathbb{N}.$$

Offenbar sind alle $u_k(x) \in [0,1]$, $u_k(\cdot)$ stetig, da $|x - y_k| \leqslant \operatorname{dist}(x,K)$ und $u_k(x) = 0$ falls $|x - y_k| \geqslant 2\operatorname{dist}(x,K)$. Setze

$$\sigma(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} u_k(x) \quad \forall x \in K^c \overset{\text{Lemma 1.10}}{\Longrightarrow} \text{gleichmäßige Konvergenz} \Longrightarrow \sigma\text{-stetig},$$

$$\forall x \in K^c \exists k : u_k(x) > 0 \Longrightarrow \sigma(x) \in [0,1].$$

Setze weiter

$$v_k := \frac{u_k(x)}{2^k \sigma(x)},$$

offenbar alle v_k stetig und $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k(x) = 1 \, \forall x$, und

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in K \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k(x) f(y_k) & x \in K^c \end{cases}.$$

Da $|f(y_k)| \leqslant c \, \forall k$, $\frac{1}{\sigma(c)} \leqslant \tilde{c}$ auf $\overline{B}_r(x) \subset K^c \overset{\text{Lemma 1.0}}{\Longrightarrow} \overline{f}$ stetig auf $\overline{B}_r(x) \Longrightarrow \overline{f}$ steitg auf K^c.
Noch zu zeigen:

$$\lim_{K^c \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in K,$$

vgl. Literatur. ∎

g-11 **Theorem 1.11 (Lusin: Messbare Funktionen sind «fast» stetig)** *Sei μ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μ-messbar, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar mit $\mu(A) < \infty$. Dann*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \subset A \text{ kompakt mit } \mu(A \setminus K) < \varepsilon \text{ und } f\big|_K \text{ stetig.}$$

Beweis. Fixiere $\varepsilon > 0$, definiere

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ seien } (B_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}^m \text{ (paarweise) disjunkt mit } \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij} = \mathbb{R}^m, \operatorname{diam} B_{ij} < \frac{1}{i} \tag{6}$$ 12-1

Sei $A_{ij} := f^{-1}(B_{ij}) \cap A \overset{\text{vgl. Hinweis}}{\Longrightarrow} A_{ij}$ μ-messbar, $(A_{ij})_j$ disjunkt. Sei $A = \bigcup_j A_{ij}, \nu := \mu \llcorner A$

ist Radonmaß Dann

$$\Longrightarrow \exists K_{ij} \subset A_{ij} \text{ kompakt: } \nu(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$$

$$\Longrightarrow \mu\left(A \setminus \bigcup_j K_{ij}\right) = \nu\left(A \setminus \bigcup_j K_{ij}\right) = \nu\left(\bigcup_j A_{ij} \setminus \bigcup_j K_{ij}\right) \leqslant \nu\left(\bigcup_j (A_{ij} \setminus K_{ij}\right)$$

wegen $\mu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^N K_{ij}\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(A \setminus \bigcup_j K_{ij}\right)$.

$$\forall i \exists N_i \in \mathbb{N} : \mu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} K_{ij}\right) < \frac{\varepsilon}{2^i},$$

Offenbar $K_i := \bigcup_{j\leqslant N} K_{ij}$ kompakt. $\forall i, j$ wähle $b_{ij} \in B_{ij}$ und setze

$$g_i : K_i \to \mathbb{R}^m \text{ mit}$$
$$g_i(x) = b_{ij} \text{ für } x \in K_{ij}\ (j \leqslant N_i)$$

Offenbar $K_{i1}, ..., K_{iN_i}$ disjunkt $\Longrightarrow$ haben positiven Abstand $\Longrightarrow$ g_i stetig auf K_i $\forall i$:

$$|f(X) - g_i(x)| \leqslant \operatorname{diam} B_{ij} \overset{(6)}{<} \frac{1}{i} \quad \forall x \in K_{ij}$$

$$\Longrightarrow g_i \to f \text{ gleichmößig auf } K := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \Longrightarrow f \text{ stetig auf } K, \text{ wo} K \text{ kompakt.}$$

Offenbar $\mu(A \setminus K) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A \setminus K_i) < \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$ ■

g-12 **Folgerung 1.12** *Sei μ, f, A wie in Theorem 1.11. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \textit{ stetig mit } \mu\left\{x \in A \mid f(x) \neq \overline{f}(x)\right\} < \varepsilon$$

Beweis. Setze $f\big|_K$ aus Theorem 1.11 mittels Theorem 1.9 auf $\mathbb{R}^n$ fort. ■

g-13 **Theorem 1.13 (Egorov: punktweise Konvergenz ist «fast» gleichmäßige Konvergenz)** *Seien μ Maß auf $\mathbb{R}^n$, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μ-messbar ($k \in \mathbb{N}$), $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, mit $\mu(A) < 0$ und $f_k \to g$ μ-f.ü. auf A (μ-messbar nach Theorem 7)*

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \subset A \mu\textit{-messbar} : \mu(A \setminus B) < \varepsilon \wedge f_k \to g \textit{ gleichmößig auf } B.$$

Beweis. Definiere

$$C_{ij} := \left\{x \in A \mid |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2^i} \forall k \geqslant j\right\}$$

μ-messbar $\forall i, j$. Offenbar ist $C_{ij} \subset C_{i,j+1}$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_{ij} = A \setminus \tilde{N}$, wo $\tilde{N}$ eine μ-Nullmenge.

$$\overset{\text{Theorem 1.1}}{\Longrightarrow} \lim_{j\to\infty} \mu(C_{ij}) = \mu(A \setminus \tilde{N}) = \mu(A) \overset{\mu(A)<\infty}{\Longrightarrow} \forall i \exists N : \mu(A \setminus C_{i,N_i}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Setze $B := \bigcap_i C_{i,N_i} \Longrightarrow |f(x) - g(x)| \leqslant 1/2^i \ \forall x \in B,\ k \geqslant N_i,\ \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow f_k \to g$ glm. auf B und

$$\mu(A \setminus B) = \mu\left(A \Big\backslash \bigcap_i C_{i,N_i}\right) = \mu\left(\bigcup_i A \setminus C_{i,N_i}\right) \leqslant \sum_i \mu(A \setminus C_{i,N_i}) < \infty$$

■

1.3 Integral und Grenzwertsätze

Sei μ Maß auf X, $f^\pm := \max\{\pm f, 0\}$, $f = f^+ - f^-$.

Konstruktion des Integrals

(i) $g : X \to [-\infty, \infty]$ heißt **Treppenfunktion**, falls die Menge $g(X)$ abzählbar. (Oft wird g mit $g(X)$ endlich als Treppenfunktion bezeichnet)

(ii) Setze für μ-messbare Treppenfunktionen $g \geqslant 0$

$$\int g \,\mathrm{d}\mu := \sum_{0 \leqslant y \leqslant \infty} y\, \mu\left(g^{-1}(y)\right) \quad (\in [0, \infty],\ \text{wo } 0 \cdot \infty = 0).$$

(iii) μ-messbare Treppenfunktion g heißt **μ-integrierbar**, falls entweder $\int g^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ oder $\int g^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Setze

$$\int g \,\mathrm{d}\mu := \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int g^- \,\mathrm{d}\mu \quad (\in [-\infty, \infty])$$

und folglich

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{|y| \leqslant \infty} y\, \mu\left(g^{-1}(y)\right)$$

für μ-integrierbare Truppenfunktionen g.

(iv) Setze nun für beliebige Funktionen $f : X \to [-\infty, \infty]$ das **obere Integral (Obertegral)**

$$\int^* f \,\mathrm{d}\mu = \inf\left\{ \int g \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g\ \mu\text{-integrierbare Treppenfunktion mit } g \geqslant f\ \mu\text{-f.ü.} \right\}$$

und das **untere Integral (Unterintegral)**

$$\int_* f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int g \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g\ \mu\text{-integrierbare Treppenfunktion mit } g \leqslant f\ \mu\text{-f.ü.} \right\}$$

Dann heißt f **μ-integrierbar**, falls

$$\int_* f \,\mathrm{d}\mu = \int^* f \,\mathrm{d}\mu := \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Schreiben auch $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$, $\int_X^* f \,\mathrm{d}\mu$, um die Integralbereiche zu betonen. Zudem setzen wir

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_X \mathbb{1}_A f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{wo } A \subset X.$$

g-14 **Satz 1.14** *Sei $f : X \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar $\Longrightarrow$ f μ-integrierbar.*

Beweis. Übung. ■

(i) $f : X \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar heißt **μ-summierbar**, falls f μ-integrierbar und $\int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

(ii) $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar heißt **lokal μ-summierbar**, falls $f\big|_K$ μ-summierbar $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

(iii) $L^1(X, \mu)$ - Menge aller μ-summierbaren Funktionen auf X.

(iv) $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$ - Menge aller μ-summierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

g-15 **Theorem 1.15 (Fatous Lemma)** *Seien $f_k : X \to [0, \infty]$ μ-messbar $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann*

$$\int \liminf_{k \to \infty} f_k \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int f_k \mathrm{d}\mu.$$

g-16 **Theorem 1.16 (monotone Konvergenz; Beppo Levi)** *Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ μ-messbar $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ μ-messbar . Dann*

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu.$$

g-17 **Theorem 1.17 (majorisierte Konvergenz; Lebesgue)** *Seien f, f_k μ-messbar $\forall k \in \mathbb{N}$, g μ-messbar, $f_k \to f$ μ-f.ü. und entweder*
(a) $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ μ-f.ü. $\forall k$
(b) $|f_k(x)| \leqslant g_k(x)$ μ-f.ü. $\forall k$ und μ-summierbare g_k mit $\int g_k \mathrm{d}\mu \to \int g \, \mathrm{d}\mu$.
Dann

$$\lim_{k\to\infty} |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{*}$$

Außedem: (*) $\Longrightarrow \int \lim_k f_k \mathrm{d}\mu = \lim_k \int f_k \mathrm{d}\mu$.

g-18 **Theorem 1.18** *Seien f, f_k μ-summierbar $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\int |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Dann existiert eine Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to f$ μ-f.ü.*

Sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ lokal μ-summierbar. Dann heißt die Abbildung ν **signiertes Maß**, falls

$$\nu(K) = \int_k f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt.}$$

Schreibe: $\nu = \mu \llcorner f$. Beachte: $\mu \llcorner A = \mu \llcorner \mathbb{1}_A$.

1.4 Produktmaße und Satz von Fubini

Sei μ ein Maß auf der Menge X, ν auf Y. Dann heißt $\mu \times \nu : \mathcal{P}(X \times Y) \to [0,\infty]$ **Produktmaß** von μ und ν, falls $\forall C \in X \times Y$:

$$(\mu\times\nu)(C) := \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \cup \mu(B_i), C = \bigcup_i A_i \times B_i,\ A_i \subset X\, \mu\text{-messbar},\ B_i \subset Y\, mu\text{-messbar} \right\}$$

g-19 **Theorem 1.19 (Satz von Fubini)** *Sei μ Maß auf X, ν auf Y. Dann*
(1) $\mu \times \nu$ ist reguläres Maß auf $X \times Y$
(2) $A \subset X$ μ-messbar, $B \subset Y$ μ-messbar $\Longrightarrow A \times B$ $(\mu\times\nu)$-messbar und $(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$
(3) Falls $C \subset X \times Y$ σ-endlich bzgl. $\mu \times \nu$ gilt:

$$C_Y := \{x \in X \mid (x,y) \in C\} \textit{ ist } \mu\textit{-messbar für } \nu\textit{-f.a. } y \in Y$$

$$C_X := \{y \in Y \mid (x,y) \in C\} \textit{ ist } \nu\textit{-messbar für } \mu\textit{-f.a. } x \in X$$

Dann ist die Funktion $x \mapsto \nu(C_X)$ μ-integrierbar, $y \mapsto \nu(C_Y)$ ν-integrierbar, und

$$(\mu\times\nu)(C) = \int_X \nu(C_X)\mu(\mathrm{d}x) = \int_Y \mu(C_Y)\nu(\mathrm{d}y).$$

(4) Sei $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ $(\mu \times \nu)$-integrierbar und σ-endlich bzgl. $(\mu \times \nu)$, dann

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(\mathrm{d}y) \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}$$

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(\mathrm{d}y) \text{ ist } \nu\text{-integrierbar}$$

und gilt:

$$\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \nu(\mathrm{d}y) \right) \mu(\mathrm{d}x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \mu(\mathrm{d}x) \right) \nu(\mathrm{d}y)$$

Auch wenn μ, ν nicht regulär!

$\mathcal{L}^1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}^1) \to [0, \infty]$ heißt **(1-dimensionales) Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^1$, falls

$$\mathcal{L}^1(A) := \inf \left\{ \sum_i \operatorname{diam} C_i \,\middle|\, A \subset \bigcup_i C_i,\ C_i \subset \mathbb{R} \right\} \quad \forall A \subset \mathbb{R},$$

dann ist $\mathcal{L}^1$ ein Maß auf $\mathbb{R}^1$.

Definiere nun induktiv das **(n-dimensionale) Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^{n-k} \times \mathcal{L}^k \ (\forall k = 1, \ldots, n-1) = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1}_{n\text{-mal}}$$

Notation: $\mathrm{d}x$ statt $\mathrm{d}\mathcal{L}^n$ und kurz: $L^1(\mathbb{R}^n)$ statt $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$.

1.5 Überdeckungssätze

g-20 **Theorem 1.20 (Vitalis Überdeckungssatz)** *Sei $\mathcal{F}$ eine Menge nichtentarteter (d.h.* diam > 0*) abgeschlossener Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit*

$$d := \sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Dann existiert eine abzählbare Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunkter Kugeln mit

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} \hat{B},$$

wobei $\hat{B}$ die konzentrierte Kugell zu B mit 5-fachem Radius.

Hinweis: Theorem 1.20 ist für Untersuchungen von $\mathcal{L}^n$ wichtig, während Theorem 1.22 (siehe unten) für allgemeinere Radonmaße verwendet wird.

Beweis. Sei

$$\mathcal{F}_j := \left\{ B \in \mathcal{F} \,\middle|\, \frac{d}{2^j} < \operatorname{diam} B < \frac{d}{2^{j-1}} \right\} \quad j \in \mathbb{N}$$

und definiere induktiv $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$:

(i) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$ irgendeine maximale Teilmenge disjunkter Kugeln

(ii) $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_k$ irgendeine maximale Teilmenge disjunkter Kugeln mit $B \cap B' = \varnothing \ \forall B \in \mathcal{G}_k$, $B' \in \bigcup_{j\leqslant k-1} \mathcal{G}_j$

$\Longrightarrow \mathcal{G} := \bigcap_{j\geqslant 1} \mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}$ ist abzählbare Menge disjunkter Kugeln

Zeige: $\forall B \in \mathcal{F} \exists B' \in \mathcal{G} : B \cap B' = \varnothing$ und $B \subset \widehat{B'}$ $(*)$

Fixiere dazu $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists j : B \in \mathcal{F}_j$

Da $\mathcal{G}_j$ maximal $\Longrightarrow \exists B' \in \bigcup_{k\leqslant j} G_k$ mit $B \cap B' \neq \emptyset$. Offenbar ist $\operatorname{diam} B' \geqslant \frac{d}{2^j}$ und $\operatorname{diam} B \leqslant \frac{d}{2^{j-1}} \Longrightarrow \operatorname{diam} B \leqslant 2 \operatorname{diam} B' \Longrightarrow B \subset \widehat{B'} \Longrightarrow (*)$ ■

g-21 **Corollar 1.21 (offene Mengen können mit disjunkten Kugel «ausgefüllt» werden)** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\delta > 0$. Dann existiert abzählbare Menge $\mathcal{G}$ disjunkter abgeschlossener Kugeln in U mit* $\operatorname{diam} B \leqslant \delta \ \forall B \in \mathcal{G}$ *und* $\mathcal{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\right) = 0$.

g-22 **Theorem 1.22 (Überdeckungssatz von Besicovitch)** *$\forall N \exists N_n \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Sei $\mathcal{F}$ Menge nicht-entarteter abgeschlossener Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

und sei A Menge der Mittelpunkte der Kugeln in $\mathcal{F}$, dann existieren abzählbare Mengen disjunkter Kugeln $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N_n} \bigcup_{B\in\mathcal{G}_j} B.$$

g-23 **Corollar 1.23** *Sei μ Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ Menge nicht-entarteter abgeschlossener Kugeln. A Menge der Mittelpunkte der Kugeln in $\mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ und*

$$\inf\left\{r \mid \overline{B_r(a)} \in \mathcal{F}\right\} = 0 \quad \forall a \in A.$$

Dann folgt: $\forall U \subset \mathbb{R}^n \exists$ abzählbare Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunkter Kugeln mit $\bigcup_{B\in\mathcal{G}} \subset U$ und $\mu\left((A \cap U) - \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\right) = 0$.

1.6 Differentiation von Radon-Maßen

Seien μ, ν Radon-Maße auf dem $\mathbb{R}^n$. Setze für einen fixierten Punkt $x \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{D_\mu}\nu(x) := \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & \text{falls } \mu\left(\overline{B_r(x)}\right) > 0 \ \forall r > 0 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\underline{D_\mu}\nu(x) := \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & \text{falls } \mu\left(\overline{B_r(x)}\right) > 0 \ \forall r > 0 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Definition (i) ν heißt **differenzierbar bzgl. μ in x**, falls $\overline{D\mu}(x) = \underline{D_\mu}(x)$.
(ii) $D_\mu(x) := \overline{D_\mu}(x) = \underline{D_\mu}(x)$ heißt dann **Ableitung** (Dichte) von ν bzgl. μ.

g-24 **Lemma 1.24** *Für $0 < \alpha < \infty$ gilt:*

a) $A \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{D_\mu}(\nu(v)) \geqslant \infty\right\} \Longrightarrow \nu(A) \geqslant \alpha\mu(A)$

b) $A \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{D_\mu}(\nu(v)) \leqslant \infty\right\} \Longrightarrow \nu(A) \leqslant \alpha\mu(A)$

Beweis. Zu b). Sei oBdA $\nu(A) < \infty$, betrachte sonst $\nu(A \cap K)$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und «groß». Wähle $\varepsilon > 0$, $U \supset A$ offen und setze

$$\mathcal{F} := \left\{ B = \overline{B_r(x)} \mid a \in A,\, B \subset U,\, \nu(B) \leqslant (\alpha + \varepsilon)\mu(B) \right\}.$$

Nach Definition von A:

$$\inf\left\{ r \middle| \overline{B_r(a)} \in \mathcal{F} \right\} = 0 \quad \forall a \in A$$

$$\overset{\text{C1.23}}{\Longrightarrow} \exists \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ abzählbar disjunkt mit } \nu\left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \nu(A) \overset{(3)}{=} \nu\left(A \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) \leqslant \nu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right)$$

$$\Longrightarrow \nu(A) = \sum_{B \in \mathcal{G}} \nu(B) \leqslant (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) = (\alpha + \varepsilon)\mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) \leqslant (\alpha + \varepsilon)\mu(U)$$

$$\overset{\text{T1.4, } U \supset A}{\Longrightarrow} \nu(A) \leqslant (\alpha + \varepsilon)\mu(A) \overset{\varepsilon > 0 \text{bel.}}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.}$$

a), analog. ■

g-25 **Theorem 1.25 (Ableitung von Radon-Maßen)** *Seien μ, ν Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$. Dann $\exists D_\mu \nu(x)$ endlich μ-f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ und $x - D_\mu \nu(x)$ ist μ-messbar auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. OBdA $\mu(\mathbb{R}^n)$, $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ (sonst Beschränkung auf kompakte Mengen).

a) Zeige: $D_\mu \nu(x)$ existiert und ist endlich μ-f.ü. Sei dazu

$$I := \{ x \mid \overline{D_\mu} \nu(x) = +\infty \} \text{ und}$$

$$R(a,b) := \{ x \mid \underline{D_\mu} \nu(x) < a < b \overline{D \mu} \nu(x) < \infty \} \text{ für } 0 < a < b$$

Offenbar $I \subset \{ x \mid D_\mu \nu(x) \geqslant \alpha \}$ $\forall \alpha > 0$

$$\overset{\text{L1.24}}{\Longrightarrow} \mu(I) \leqslant \frac{1}{\alpha} \ni (I) \overset{\alpha \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Longrightarrow \mu(I) = 0, \text{ d.h. } \overline{D_\mu} \nu(x) \text{ endlich } \mu\text{-f.ü.}$$

Lemma 1.24 liefert auch: $b\mu(R(a,b)) \leqslant \nu(R(a,b)) \leqslant a\mu(R(a,b)) \Longrightarrow \mu(R(a,b)) = 0$ $\forall 0 < a < b$.

Offenbar

$$\left\{ x \mid \underline{D_\mu} \nu(x) < \overline{D_\mu} \nu < \infty \right\} = \bigcup_{0 < a < b,\, a,b \in \mathbb{Q}} R(a,b)$$

die rechte Seite ist μ-Nullmenge $\Longrightarrow$ Behauptung a).

b) Zeige:

$$\limsup_{y \to x} \mu\left(\overline{B_r(y)} \right) \leqslant \mu\left(\overline{B_r(x)} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0,$$

analog für ν (bzw. beliebige Radon-Maße), d.h. $x \mapsto \mu\left(\overline{B_r(x)} \right)$ ist oberhalb stetig (ohs).

Betrachte $y_k \to x$ in $\mathbb{R}^n$, setze $f_k := \mathbb{1}_{\overline{B_r(y_k)}}$, $f := \mathbb{1}_{\overline{B_r(x)}}$. Dann ist offenbar

$$\Longrightarrow \limsup_{k\to\infty} f_k \leqslant f \text{ (punkteweise)} \liminf_{k\to\infty} 1 - f_k \geqslant 1 - f$$

$$\Longrightarrow \int_{\overline{B_{2r}(x)}} (1-f)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\overline{B_{2r}(x)}} \liminf \underbrace{(1-f_k)}_{\geqslant 0} \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_{\overline{B_{2r}(x)}} (1-f_k)\mathrm{d}\mu$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\overline{B_{2r}(x)}\right) - \mu\left(\overline{B_r(x)}\right) \leqslant \liminf\left(\mu(\overline{B_{2r}(x)}) - \mu(\overline{B_r(y_k)})\right)$$

$\overset{\mu(\overline{B_{2r}(x)})<\infty}{\Longrightarrow}$ Behauptung b).

c) Zeige: $D_\mu \nu(\cdot)$ ist μ-messbar. Dazu: $x \mapsto \mu(\overline{B_r(x)})$, $x \mapsto \nu(\overline{B_r(x)})$ ohs nach b) und somit μ-messbar $\forall r > 0$ (da μ, ν Borelmaße). Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & \text{für } \mu(B_r(x)) > 0 \\ +\infty & \text{für } \mu(B_r(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{ist } \mu\text{-messbar für alle } r > 0$$

Offenbar ist $D_\mu\nu(x) = \liminf_{r\to 0} f_r(x) = \liminf_{k\to\infty} f_{1/k}(x)$ μ-f.ü. $\overset{\text{T1.7}}{\Longrightarrow}$ Behauptung c) $\Longrightarrow$ Behauptung.

■

Definition (i) Das Maß ν heißt **absolutstetig** bzgl. Maß μ, schreibe $\nu \ll \mu$, falls $\forall A \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

(ii) ν und μ heißen **singulär zueinander**, schreibe $\nu \perp \mu$, falls

$$\exists \text{Borelmenge } B \subset \mathbb{R}^n : \mu\left(\mathbb{R}^n \setminus B\right) = \nu(B) = 0.$$

g-26 **Theorem 1.26** *Seien μ, ν Radonmaße auf $\mathbb{R}^n$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gilt*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu\nu(x)\,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n \text{ } \mu\text{-messbar.}$$

Beachte: «Verwandtschaft» zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

g-27 **Theorem 1.27 (Lebesgue'scher Zerlegungssatz)** *Seien μ, ν Radonmaße auf $\mathbb{R}^n$. Dann:*

1) *Es existieren Radonmaße ν_{ac} (absolutly continous), ν_s (singular) auf $\mathbb{R}^n$ mit $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, $\nu_{ac} \ll \mu$, $\nu_s \nu$*
2) *Es gilt $D_\mu\nu = D_\mu\nu_{ac}u$. $D_\mu\nu_s = 0$ μ-f.ü. und folglich (vgl. Therem 1.26)*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu\nu \mathrm{d}\mu + \nu_s(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}^n$$

ν_{ac} heißt **absolutstetiger Teil von** *ν, ν_s singulärer Teil von ν.*

1.7 Lebesgue-Punkte und approximative Stetigkeit

$$⨍ f(x)\,\mathrm{d}\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$

heißt **Mittelwert** von f auf A bzgl. μ, falls $0 < \mu(A) < \infty$ und das Integral existiert.

g-28 **Theorem 1.28 (Differentiationssatz von Lebesgue/Bosicovitch)** *Sei μ Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dann*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f(y)\mu(\mathrm{d}y) = f(x) \text{ für } \mu\text{-f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. Setze

$$\nu^\pm(B) := \int_B f^\pm \,\mathrm{d}\mu \qquad \forall B \in \mathcal{B}^n$$

$$\nu^\pm(A) := \int \{\nu^\pm(B) \mid A \subset B, B \in \mathcal{B}^n\} \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^n \qquad (*)$$

$\Longrightarrow$ $\nu^\pm$ sind Radonmaße und $\nu^\pm \ll \mu$ (Nachrechnen!)

$\overset{\text{Theorem 1.26}}{\Longrightarrow} \nu^\pm(A) = \int_A D_\mu \nu^\pm \mathrm{d}\mu = \int_A f^\pm \mathrm{d}\mu \ \forall A$ μ-messbar

$\Longrightarrow D_\mu \nu^\pm(x) = f^\pm(x)$ μ-f.ü. auf $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{r\to 0} \left(\nu^+\left(\overline{B_r(x)}\right) - \nu^-\left(\overline{B_r(x)}\right)\right)$

$= D_\mu \nu^+(x) - D_\mu \nu^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ μ-f.ü. ■

g-29 **Corollar 1.29** *Sei $1 \leqslant p < \infty$.*

1) *Sei μ Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dann gilt für μ-f.a. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|^2 \mu(\mathrm{d}y) = 0 \tag{7}$$

und x mit (4) heißt **Lebesgue-Punkt** *von f.*

2) *Sei $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$. Dann gilt für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{\substack{\operatorname{diam} B\to 0,\\ x\in B \text{ abg.}}} \fint_B |f(y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}y = 0$$

wegen

$$\left|\fint_{B_r(x)} f \,\mathrm{d}\mu - f(x)\right| \leqslant \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\,\mu(\mathrm{d}y)$$
$$\leqslant \left(\fint_{B_r(x)} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|^p \mu(\mathrm{d}y)\right)^{1/p}$$

impliziert (4)

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f \,\mathrm{d}\mu = f(x), \tag{8}$$

d.h. (5) gilt in jedem Lebesgue-Punkt von f (vgl. Theorem 1.28). Andererseits: Falls Grenzwert in (5) existiert, muss x **nicht** *zwingend Lebesgue-Punkt sein.*

Definition (i) Für $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{dens}_A(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap A)}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \in [0,1]$$

Dichte von x **bzgl.** A.

(ii) $A_* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dens}_A(x) = 1\}$ ist **maßtheoretisch Inneres von** A.

(iii) $A^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dens}_A(x) = 0\}$ ist **maßtheoretisch Äußeres von** A.

(iv) $\partial_* A := \mathbb{R}^n \setminus (A^* \cup A_*)$ ist **maßtheoretischer Rand**.

Beachte: 1.30 $x \in A_*$ oder $x \in A^* \not\rightarrow x \in A$

Hinweis: 1.31 A_*, A^*, ∂A sind stets Borelmengen und offenbar gilt: $\operatorname{int} A \subset A_*$ und $\operatorname{ext} A \subset A^*$

g-30 **Corollar 1.32** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar.*

$$\Longrightarrow \operatorname{dens}_A(x) = 1 \textit{für } \mathcal{L}^n\textit{-f.a. } x \in A \qquad \Longrightarrow \operatorname{dens}_A(x) = 0 \textit{für } \mathcal{L}^n\textit{-f.a. } x \in \mathbb{R}^n \setminus A$$

Beweis. Wähle $f = \mathbb{1}_A$, $\mu = \mathcal{L}^n$ in Theorem 1.28 ∎

Offenbar folgt für $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar.

$$\mathcal{L}^n(\partial_* A) = 0, \mathcal{L}^n(A_* \setminus A) = \mathcal{L}^n(A \setminus A_*) = 0$$

Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$f^*(x) := \begin{cases} \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f\,dy & \text{falls existient (beachte: } \exists \text{ für f.a. } x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

präziser Repräsentant von f.

Beachte: 1.33 Für $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $f = g$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. gilt $f^* = g^*$ für **alle** $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (beliebige) Funktionen $\lambda \in \mathbb{R}^m$ heißt **approximativer Grenzwert** von f in $x \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{|f-\lambda| \geqslant \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{9}$$

d.h. $\operatorname{dens}_{\{|f-\lambda|\geqslant\varepsilon\}} x = 0$ $\forall \varepsilon > 0$. Man schreibt:

$$\lambda = \operatorname{aplim}_{y\to x} f(x)$$

g-31 **Theorem 1.34** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dann ist* $\operatorname{aplim}_{x\to x} f(y)$ *eindeutig* $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ erfüllen (7) für $x \in \mathbb{R}^n$, setze $\varepsilon := \frac{1}{3}\left|\lambda - \tilde{\lambda}\right|$. Offenbar ist

$$\begin{aligned} 3\varepsilon = \left|\lambda - \tilde{\lambda}\right| &\leqslant |f(y) - \lambda| + \left|f(y) - \tilde{\lambda}\right| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Longrightarrow B_r(x) \subset \{|f-\lambda| \geqslant \varepsilon\} \cup \{\left|f-\tilde{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\} \quad \forall r > 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{L}^n(B_r(x)) \leqslant \mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{|f-\lambda| \geqslant \varepsilon\}) + \mathcal{L}^n\left(B_r(x) \cap \{\left|f-\tilde{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\}\right) \\ &\quad \frac{1}{2}\mathcal{L}^n(B_r(x)) \quad \forall 0 < r < r_0 \end{aligned}$$

∎

Definition Eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **approximativ stetig in** $x \in \mathbb{R}^n$, falls

$$\operatorname{aplim}_{y\to x} f(y) = f(x) \tag{10}$$

g-32 **Theorem 1.35** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dann*

$$f\ \mathcal{L}^n\text{-messbar auf } \mathbb{R}^n \iff f \text{ approximativ stetig für } \mathcal{L}^n\text{-f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. $\Longrightarrow$ Seien $B_k = B_k(0) \subset \mathbb{R}^n$, nach Satz von Lusin existieren kompakte Mengen K_k mit: $f\big|_{K_k}$ stetig in $\forall k$,

$$K_1 \subset B_1 \text{ mit } \mathcal{L}^n(B_1 \setminus K_1) \leqslant 1 \text{ und}$$

Offenbar gilt:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\big(mL^n(B_r(x) \setminus K_j\big)}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B_r(x)) - \mathcal{L}^n(B_r(x) \cap K_j}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \text{ für } \mathcal{L}^n\text{-f.a. } x \in K_j$$

Fixiere $x \in A_j \xRightarrow{f_{K_j} \text{ stetig}} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\ \forall y \in K_j \cap B_\delta(x)$

$\Longrightarrow B_r(x) \cap \{y \mid |f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset B_r(x) \setminus K_j\ \forall r \in (0, \delta)$

$\xRightarrow{(**),(7)} f$ approximativ stetig in $x \overset{()}{\Rightarrow}$ Behauptung

$\Longleftarrow$ vgl. Literatur. ∎

1.8 Rieszscher Darstellungssatz

g-33 **Theorem 1.36 (Rieszscher Darstellungssatz)** *Sei $L : C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ lineares Funktional und für jedes $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und*

$$\sup\{L(f) \mid f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \operatorname{spt} f \subset K, |f(x)| \leqslant 1\ \forall x\} < \infty. \tag{11}$$

Dann existiert ein Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μ-messbar mit $|\sigma(x)| = 1$ μ-f.ü.

$$\mu(V) = \sup\{L(f) \mid f \in C_(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \operatorname{spt} f \subset V, |f| \leqslant 1\}\ \forall V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sigma(x)\mu(\mathrm{d}x) \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m).$$

μ heißt **Variationsmaß** *von L.*

g-34 **Lemma 1.37** *Sei $L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linear und $L(f) \geqslant 0\ \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geqslant 0$. Dann existiert ein Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

1.9 Schwache Konvergenz und Kompaktheit von Radonmaßen

Seien μ, μ_k $(k \in \mathbb{N})$ Radonmaße auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind folgedene Aussagen äquivalent:

(a) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu_k = \int_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\mu\ \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)$

(b) $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leqslant \mu(K)\ \forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(U) \geqslant \mu(K)\ \forall U \subset \mathbb{R}^n$ offen

(c) $\lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)\ \forall B \in \mathcal{B}^n$ beschränkt und $\mu(\partial B) = 0$.
Die Maße μ_k **konvergieren schwach** gegen Maß μ, falls a), b) oder c) gilt. Man schreibt: $\mu_k \to \mu$

Bemerkung Wegen $\mathrm{D}_{\mathcal{L}^{-1}}\nu(t) < \infty$ für $\mathcal{L}^1$-f.a. $t \in \mathbb{R}$:

$$\text{Sei } \nu \text{ Radonmaß auf } \mathbb{R} \Longrightarrow v\{t\} = 0 \text{ für } \mathcal{L}^1\text{-f.a. } t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

Beweis. a) $\Longrightarrow$ b) Fixiere $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, für $K \subset U$ kompakt, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\operatorname{spt} f \subset U$, $f = 1$ auf K gilt:

$$\mu(K) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu \overset{a)}{=} \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu_k \leqslant \liminf_k \mu_k(U)$$
$$\Longrightarrow \mu(U) \overset{Th.4}{=} \sup\{\mu(K) \mid K \subset U \text{ kompakt}\} \leqslant \liminf_k \mu_k(U)$$

Andere Ungleichung in b) analog.
b) $\Longrightarrow$ c) Sei $B \subset \mathcal{B}^n$ beschränkt mit $\mu(\partial B) = 0$. Dann

$$\mu(B) = \mu(\operatorname{int} B) \overset{b)}{\leqslant} \liminf_k \mu_k(\operatorname{int} B) \leqslant \liminf_k \mu_k(\overline{B})$$
$$\overset{b)}{\leqslant} \mu(\overline{B}) = \mu(B) \Longrightarrow c)$$

c) $\Longrightarrow$ a) Fixiere $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, zunächst $f \geqslant 0$. $\exists R > 0 : \operatorname{spt} f \subset B_R(0)$ und $\mu(\partial B) = 0$.
Wähle $0 = t_0 < t_1 a ... < t_N$ mit $0 < t_i - t_{i-1} < \varepsilon$, $t_N > \|f\|_c$, $\mu\left(f^{-1}(t_i)\right) = 0\ \forall i = 1, ..., N$.
Setze $B_i := f^{-1}\left((t_{i-1}, t_i]\right) \Longrightarrow \mu(\partial B_i) = 0\ \forall i \geqslant 2$. Offenbar:

$$\sum_{i=2}^N t_{i-2}\mu_k(B_i) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu_k \leqslant \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) + t_1\mu_k(B_R(0))$$

und

$$\sum_{i=2}^N T_{i-1}\mu(B_i) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) + t_1\mu_k(B_R(0))$$

$$\overset{c)}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant 2\varepsilon\mu(B_R(0))$$
$$\overset{\varepsilon>0 bel.}{\Longrightarrow} \text{a) für } f \geqslant 0$$
$$\overset{f=f^+-f^-}{\Longrightarrow} \text{a) für alle } f$$

■

g-36 **Theorem 1.38 (Schwache Kompaktheit)** *Seien μ_k ($k \in \mathbb{N}$) Radonmaße auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sup_k \mu_k(K) < \infty\ \forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann $\exists$ TF μ_{k_j} und Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu_{k_j} \to \mu$.*

Beweis. Setze

$$M := \sup_k \mu_k(\mathbb{R}^n) < \infty \tag{$*$}$$

Sei $(f_k)_1^\infty$ dichte Teilmenge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ (bzgl. $\|\cdot\|_C$)
$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(\int f_1 \mathrm{d}\mu_k\right)_k \subset \mathbb{R}$ beschränkt

$\Longrightarrow \exists$ TF μ_k^1 mit $\displaystyle\int f_1 \mathrm{d}\mu_k^1 \to a_1 \in \mathbb{R}$

Konstruiere induktiv $(\mu_k^j)_k$ aus $(\mu_k^{j-1})_k$ mit $\int f_j \mathrm{d}\mu_k^j \xrightarrow{k\to\infty} a_j \in \mathbb{R}$ mit $\nu_k := \mu_k^k$ gilt:

$$\int f_j \mathrm{d}\nu_k \xrightarrow{k\to\infty} a_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Setze $L(f_j) := a_j \overset{(*)}{\Longrightarrow} L$ linear und $|L(f_k)| \leqslant M \|f_k\|_C$

$\xRightarrow{(f_k) dicht}$ existiert eindeutige Fortsetzung $\overline{L} : C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear, beschränkt, $L(f) \geqslant 0$ für $f \geqslant 0$

$\xRightarrow{Coro34} \exists$ Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$: $\overline{L}(f) = \int f \mathrm{d}\mu \;\forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Fixiere bel. $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{(f_k) dicht}$ $\exists$ TF $f_{k_j} \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_C$. Damit zeigt man

$$\int f \mathrm{d}\mu_k^k \to \int f \mathrm{d}\mu \xRightarrow{Thm35} \textit{Beh.}$$

■

Beispiel Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^p(U)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $f \geqslant 0$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf U. Setze

$$\mu(A) := \int_A f(x)\mathrm{d}x \quad \forall A \subset U\; \mathcal{L}^n\text{-messbar}$$
$$\mu(A) := \inf\{\mu(V) \mid A \subset V \subset U,\, V \text{ offen}\}\; \forall A \subset U$$

Dann ist μ Radonmaß auf U, $\mu \ll \mathcal{L}^n$ und $\mathrm{D}_{\mathcal{L}^n}\mu(x) = f(x)$ f.ü. auf U, $\mu = \mathcal{L}^n \llcorner f$.
Seien $f, f_k \in Ł^p(U)$, $f, f_k \geqslant 0$ f.ü. und $\mu_k := \mathcal{L}^n \llcorner f_k$, $\mu := \mathcal{L}^n \llcorner f$, dann:

$$\mu_k \to \mu \overset{Thm35}{\Longleftrightarrow} \int_U g \mathrm{d}\mu_k = \int_U g f_k \mathrm{d}x \to \int_U g f \mathrm{d}x = \int_U g \mathrm{d}\mu \;\forall g \in C_0(U) \tag{13}$$

Allgemein für $f, f_k \in L^p(U)$, $1 \leqslant p < \infty$ definiere:

$$f_k \textbf{ konvergiert schwach} \text{ gegen } f \text{ in } L^p(U) :\Longleftrightarrow \int_U g f_k \mathrm{d}x \to \int_U g f \mathrm{d}x \;\forall g \in L^{p'}(U), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{14}$$

(beachte: C_0 dichte in $L^{p'}$ für $p > 1$)
Notation: $f_k \rightharpoonup f$.

Bemerkung Auch $\langle g, f_k\rangle \to \langle g, f\rangle$ und $\mu_k := \mathcal{L}^n \llcorner f_k$ i.A. signierte Maße.

g-38 **Theorem 1.39 (Schwache Kompaktheit in L^p)** *Sei $(f_k) \subset L^p(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leqslant p < \infty$ und $\sup_k \|f_k\|_{L^p} < \infty$ (d.h. (f_k) beschränkt in L^p). Dann existiert TF f_{k_j} und $f \in L^p(U)$ mit $f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f$ in $L^p(U)$.*

Hinweis: I. A. falsch für $p = 1$

Beweis. Anwendung von Tim 36 auf $\mu_k^{\pm} := \mathcal{L}^n \llcorner f_k^{\pm}$ (vgl. Literatur). ■

2 Hausdorff-Maß

Für $s \geqslant 0$ sei
$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$
mit
$$\Gamma(\sigma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\sigma-1} \mathrm{d}x$$
die Gamma-Funktion für $\sigma > 0$. Es gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$). Damit
$$\mathcal{L}^n(B_r(x)) = \alpha(n) r^n \text{ für Kugeln } B_r(x) \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$
Setze für $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant s < \infty$, $0 < \delta \leqslant \infty$ ($\operatorname{diam} \varnothing = 0$, $0^0 = 1$)
$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \,\middle|\, A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leqslant \delta \right\} \tag{2}$$
dann heißt
$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \quad (\in [0,\infty]) \tag{3}$$
s-dimensionales Hausdorffmaß von A.

Bemerkung (1) $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ ist monoton fallend auf $(0,\infty] \Longrightarrow \lim_{\delta\to 0}$ in (3) existiert und ist gleich $\sup_{\delta>0}$.
(2) Wegen $\delta \to 0$ wird die «Gestalt» von A immer besser erfasst.

h-01 **Theorem 2.1** *Sei $0 \leqslant s < \infty$. Dann: $\mathcal{H}^s$ ist Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$.*

Hinweis. (1) $\mathcal{H}^s$ ist *kein* Radonmaß für $0 \leqslant s < n$, da z.B. $\mathcal{H}^s\left(\overline{B_1(0)}\right) = \infty$ für kompakte Menge $\overline{B_1(0)}$
(2) $\mathcal{H}^s_\delta$ ist Maß auf $\mathbb{R}^n$ $\forall s \in [0,\infty)$, $\delta \in (0,\infty]$

Beweisskizze (a) Zeige: $\mathcal{H}^s_\delta$ ist Maß für $0 < \delta \leqslant \infty$
Fixiere $(A_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n$ und sei $A_k \subset \bigcup_j C_j^k$, $\operatorname{diam} C_j^k \leqslant \delta$
$$\stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_k A_k\right) \leqslant \sum_k \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j^k}{2}\right)^s$$
Infimum für festes k: $\leqslant \sum_k \mathcal{H}^s_\delta(A_k)$
(b) Zeige: $\mathcal{H}^s$ ist Maß für $(A_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n$ gilt
$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_k A_k\right) \stackrel{(2)}{\leqslant} \sum_k \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \stackrel{(3)}{\leqslant} \sum_k \mathcal{H}^s(A_k) \xrightarrow{\delta\to\infty} \text{Behauptung}$$
(c) Zeige $\mathcal{H}^s$ ist Borelmaß. Man zeigt: $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0 \xrightarrow{Thm 1.6}$ Behauptung
(d) Zeige $\mathcal{H}^s$ Borel-regulär. Vgl. Literatur.

∎

h-02 **Theorem 2.2** *Sei* $0 \leqslant s < \infty$. *Dann*

(1) $\mathcal{H}^0$ *ist das Zählmaß.*

(2) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *auf* $\mathbb{R}^1$.

(3) $\mathcal{H}^s(A) = 0 \ \forall A \subset \mathbb{R}^n$ *falls* $s > n$

(4) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A) \ \forall \lambda > 0, A \subset \mathbb{R}^n$

(5) $\mathcal{H}^s(LA) = \mathcal{H}^s(A)$ *falls* $A \subset \mathbb{R}^n$ *und* $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *affin linear und isometrisch*

(6) $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ *für* $A \subset \mathbb{R}^n$ *und ein* $\delta \in (0, \infty] \Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) = 0$

Beweis. (1) Es ist $\alpha(0) = 1 \Longrightarrow \mathcal{H}^0_\delta\{a\} = 1 \ \forall a \in \mathbb{R}, \delta > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^0\{a\} = 1 \ \forall a$

(2) Sei $A \subset \mathbb{R}, \delta > 0, \alpha(1) = 2$. Dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(A) &= \inf \left\{ \sum_j \operatorname{diam} C_j \,\middle|\, A \subset \bigcup_j C_j \right\} \qquad (*) \\ &\leqslant \inf \left\{ \sum_j \operatorname{diam} C_j \,\middle|\, A \subset \bigcup_j C_j, \operatorname{diam} C_j \leqslant \delta \right\} \\ &\overset{\alpha(1)=2}{=} \mathcal{H}^1_\delta(A) \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit $I_k := [k\delta, (k+1)\delta]$, $k \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leqslant \delta$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leqslant \operatorname{diam} C_j$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mathcal{L}^1 \overset{(*)}{\geqslant} \inf \left\{ \sum_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_j C_j \right\} \geqslant \mathcal{H}^1_\delta(A) \\ &\Longrightarrow \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{H}^1_\delta(A) \quad \forall \delta > 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1 \text{ auf } \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

(3) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ der Einheitswürfel, zerlege diesen in m^n Teilwürfel mit Seitenlänge $\frac{1}{m}$ und Durchmesser $\frac{\sqrt{n}}{m}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(Q) \leqslant \sum_{k=1}^{m^n} \alpha(s) \left(\frac{\sqrt{n}}{2m} \right)^s = \alpha(s) \frac{n^{s/2}}{s^2 m^{s-n}} \xrightarrow[s>n]{m \to \infty} 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{H}^s(Q) = 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0 \\ &\Longrightarrow \text{ Behauptung} \end{aligned}$$

(4) und

(5) 5) folgen leicht aus der Definition (2) für $\mathcal{H}^s_\delta$

(6) vgl. Literatur.

∎

h-03 **Lemma 2.3** *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant s < t < \infty$. *Dann*

(1) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

(2) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Beweis. (1) Sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty, \delta > 0 \Longrightarrow \exists (C_j)_j$ mit $A \subset \bigcup_j C_j, \operatorname{diam} C_j \leqslant \delta$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \overset{(3)}{\leqslant} \mathcal{H}^s(A) + 1 \qquad (*)$$

Dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leqslant \sum_j \alpha(t) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^t = \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right) (\operatorname{diam} C_j)^{t-s} \\
&\leqslant \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{t-s} \delta^{t-s} \left(\mathcal{H}^s(A) + 1\right) \xrightarrow[t-s\to 0]{\delta\to 0} 0 \\
&\Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0
\end{aligned}$$

(2) Sei $\mathcal{H}^t(A) > 0$. Angenommen $\mathcal{H}^s(A) < \infty \overset{1)}{\Longrightarrow} \mathcal{H}t(A) = 0 \lightning \Longrightarrow$ Behauptung.

■

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$\mathcal{H}_{\text{dim}}(A) := \inf \{0 \leqslant s < \infty \,|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\} \ (\leqslant n)$$

Hausdorff-Dimension von A. Beachte

$$\mathcal{H}^t(A) \begin{cases} = 0 & \forall t > \mathcal{H}_{\text{dim}}(A) \\ \in [0,\infty] & t = \mathcal{H}_{\text{dim}}(A) \\ = \infty & t < \mathcal{H}_{\text{dim}}(A) \end{cases}$$

h-04 **Theorem 2.4** *$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$.*

Der Beweis benutzt

h-05 **Satz 2.5 (isodiametrische Ungleichung)** *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) &\leqslant \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\right)^n \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^n \\
&= \mathcal{L}^n(B_r(x)) \text{ mit } r = \frac{\operatorname{diam} A}{2}, \, x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Beweis von Theorem 2.4. Alle verwendeten Würfel seien achsenparallel.

(a) Zeige $\mathcal{L}^n(A) \leqslant \mathcal{H}^n(A) \ \forall A \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\delta > 0$, $A \subset \bigcup_j C_j$, $\operatorname{diam} C_j \leqslant \delta$. Dann

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \mathcal{L}^n(A) \leqslant \sum_j \mathcal{L}^n(C_j) \overset{S5}{\leqslant} \sum_j \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^n \\
&\overset{\inf}{\Longrightarrow} \mathcal{L}^n(A) \leqslant \mathcal{H}^n_\delta(A) \\
&\overset{\delta\to 0}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

(b) Zeige $\mathcal{H}^n \ll \mathcal{L}^n$: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Würfel mit Seitenlänge σ. Dann

$$\alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} Q}{2}\right)^n = \alpha(n) \left(\frac{\sqrt{n}\sigma}{2}\right)^n = \underbrace{\alpha(n) \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n}_{=: c_n} \mathcal{L}^n(Q) \qquad (**)$$

Für $\delta > 0, A \subset \mathbb{R}^n$ folgt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leqslant \inf\left\{\sum_{j\leqslant n}\alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam} Q_j}{2}\right)^n \,\middle|\, Q_j \text{ Würfel}, A \subset \bigcup_j Q_j, \operatorname{diam} Q_j \leqslant \delta\right\}\\
&\overset{(**)}{\leqslant} c_n \inf\left\{\sum_j \mathcal{L}^n(Q_j) \,\middle|\, Q_j \text{ Würfel}, A \subset \bigcup_j Q_j, \operatorname{diam} Q_j \leqslant \delta\right\}\\
&= c_n \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}
$$

Für $\delta \to 0$ folgt

$$\mathcal{H}^n(A) \leqslant c_n \mathcal{L}^n(A)$$

die Behauptung.

(c) Zeige: $\mathcal{H}^n(A) \leqslant \mathcal{L}^n(A)\ \forall A \subset \mathbb{R}^n$.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n, \delta > 0, \varepsilon > 0$, dann (vgl (6)) $\exists$ Würfel $Q_j : A \subset \bigcap_j Q_j$, $\operatorname{diam} Q_j \leqslant \delta$ und $\sum_j \mathcal{L}^n(Q_j) \leqslant \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$. Nach Corollar 21 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge abgeschlossener disjunkter Kugeln $B^j_k \subset \inf_{k\in\mathbb{N}} Q_j$ mit $\operatorname{diam} B^j_k \leqslant \delta$

$$
\begin{aligned}
0 = \mathcal{L}^n\left(\operatorname{int} Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right) &= \mathcal{L}^n\left(Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right)\\
\overset{b)}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^n\left(Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right) &= 0\\
\Longrightarrow \mathcal{H}^n_\delta\left(Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$\mathcal{L}^n$ Borelmaß, $B^j_k \subset Q_j$. Dann

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(Q_j) &= \mathcal{L}^n\left(Q_j \cap \bigcup_j B^j_k\right) + \underbrace{[}\ 0.5pt]\mathcal{L}^n\left(Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right)_{=0}\\
&= \mathcal{L}^n\left(\bigcup_k B^j_k\right)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{H}^n_\delta$ ist Maß, denn

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(Q_j) &\leqslant \mathcal{H}^n_\delta\left(Q_j \cap \bigcup_k B^j_k\right) + \underbrace{\mathcal{H}^n_\delta\left(Q_j \setminus \bigcup_k B^j_k\right)}_{=0}\\
&= \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_k B^j_k\right)
\end{aligned}
$$

Damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leqslant \sum_k \mathcal{H}^n_\delta(Q_j) \leqslant \sum_j \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_k B^j_k\right) \\
&\leqslant \sum_j \sum_k \mathcal{H}^n_\delta(B^j_k) \leqslant \sum_j \sum_k \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam} B^j_k}{2}\right)^n \\
&= \sum_j \sum_k \mathcal{L}^n(B^j_k) = \sum_j \mathcal{L}^n\left(\bigcup_k B^j_k\right) \\
&= \sum_j \mathcal{L}^n(Q_j) \\
&\leqslant \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leqslant \mathcal{L}^n(A)$$

und für $\delta \to 0$ die Behauptung.

■

Beachte: $\mathcal{H}^s$ trivial für $s > n$, somit interessant für $0 < s < n$!

Wiederhole: $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{dens}_A(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\left(B_r(x) \cap A\right)}{\alpha(n) r^n} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{f.ü. auf } A \\ 0 & \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}
\end{aligned}$$

h-06 **Satz 2.6** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^s$-messbar, $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, $0 < s < n$. Dann*

$$(1) \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(B_r(x) \cap A)}{\alpha(s) r^s} = 0 \text{ für } \mathcal{H}^s\text{-f.a. } x \in \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$(2) \frac{1}{2^s} \leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(B_r(x) \cap A)}{\alpha(s) r^s} \leqslant 1 \text{ für } \mathcal{H}^s\text{-f.a. } x \in A$$

Hinweis: «< 1» in (2) bzw. $\liminf \cdots = 0$ *für $\mathcal{H}^s$-f.a. $x \in A$ möglich.*

3 Area- und Coarea-Formel (Flächen- und Coflächen-Formel)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig.

Ziele (grob):

(i) Area-Formel ($m \geqslant n$): Integralformel für $\mathcal{H}^n(f(A))$

(ii) Coarea-Formel ($m \leqslant n$): gewisse Verallgemeinerung von Fubini

(iii) Integration unter Variablentranformation f

Wiederholung: Trafosatz: $n = m$, f Diffeomorphismus, g integrierbar, $f : U \to V$. Dann

$$\int_U g(f(y))\,|\det f'(y)|\,\mathrm{d}y = \int_V g(x)\mathrm{d}x.$$

Integration auf Mannigfaltigkeit: $M = f(U)$ ($n \leqslant m$), g integrierbar.

$$\int_M g\mathrm{d}a = \int_U g(f(x))\sqrt{\det f'(x)^t f'(x)}\mathrm{d}x$$

3.1 Lipschitz-Funktion

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **Lipschitz-stetig** auf D, falls $c \geqslant 0$ existiert, mit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y| \quad \forall x, y \in D \tag{1}$$ arE-01

Die kleinst mögliche Schranke c in (1) ist

$$\operatorname{Lip} f := \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \,\middle|\, x, y \in D,\ x \neq y \right\} \tag{2}$$ arE-02

und heißt **Lipschitz-Konstante**.

f heißt **lokal Lipschitz-stetig** auf D, falls

$$\forall K \subset D \text{ kompakt } \exists c_k : |f(x) - f(y)| \leqslant c_k\,|x - y| \quad \forall x, y \in K, \tag{3}$$ arE-03

und

$$\operatorname{graph}(f, A) := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n_f \times \mathbb{R}^m\ (\mathbb{R}^{n+m})$$

heißt **Graph von** f **auf** A.

f heißt **differenzierbar** in $x \in \mathbb{R}^n$, falls $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear existiert mit

$$f(y) = f(x) + L(y - x) + o(|y - x|)\ (\text{für } y \to x)$$

$$\mathrm{D}f(x) := L\,(f'(x)) \tag{4}$$ arE-04

heißt **Ableitung** von f in x.

Beispiel (i) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Longrightarrow L$ Lip-stetig

(ii) $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($k \leqslant n$) «übliche» Projektion $\Longrightarrow P$ linear, $\operatorname{Lip} P = 1$

ar-01 **Satz 3.1** *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$. *Dann*

(1) $\mathcal{L}^n(A) > 0 \Longleftarrow \mathcal{H}_{\dim}(\operatorname{graph}(f, A)) \geqslant n$
(2) $\mathcal{L}^n(A) > 0$, *f Lip-stetig* $\Longleftarrow \mathcal{H}_{\dim}(\operatorname{graph}(f, A)) = n$
(3) *f Lip-stetig*, $0 \leqslant s < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^s(f(A)) \leqslant (\operatorname{Lip} f)^s \mathcal{H}^s(A)$

ar-02 **Theorem 3.2** *Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dann*
(1) (Kirszschaum) f Lip-stetig $\Longrightarrow \exists$ Fortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lip-stetig mit $\operatorname{Lip} f = \operatorname{Lip} \overline{f}$
(2) (Rademacher) f lokal Lip-stetig, A offen $\Longrightarrow f$ differenzierbar $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf A
(3) A offen: f lokal Lip-stetig $\Longleftrightarrow f \in W^{1,\infty}_{loc}(A)$ (Sobolevfunktion)

3.2 Funktionaldeterminante (Jacobian)

Für $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear heißt $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **adjungierte Abbildung** zu A, falls

$$\langle y, Ax \rangle_m = \langle A^* xy, x \rangle_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}^m$$

(A^* linear, $A^* = A^t$ in Matrizenschreibweise)
$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **symmetrisch**, falls $S = S^*$.
$R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **orthogonal**, falls $\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

ar-03 **Satz 3.3** *Es gilt für lineare Abbildungen:*
(a) $A^{**} = A$, $(AB)^* = A^* B^*$, $\det A^* = \det A$, $\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$, *Falls A^{-1} existiert.*
(b) $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *orthogonal* $\Longleftrightarrow R^* - R = \mathrm{id}_n \Longrightarrow R$ *injektiv* $\Longrightarrow n \leqslant m$
$\overset{n=m}{\Longleftrightarrow} R^* = R^{-1}$
(c) $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *symmetrisch, positiv definit* $\Longrightarrow \exists! C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *symmetrisch, positiv definit:* $S = C^2$, *schreibe:* $C = \sqrt{S}$
(d) $A^* A$ *symmetrisch, positiv definit. Falls A zusätzlich regulär: $A^* A$ regulär*

ar-04 **Satz 3.4 (Polarzerlegung (Cauchy))** *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann*
(a) $n \leqslant m : \exists S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *symmetrisch*, $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *orthogonal mit* $L = RS$ (5)
(b) $n \leqslant m : \exists S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *symmetrisch*, $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *orthogonal mit* $L = SR^*$ (6)
(beachte: R^* i.A. nicht orthogonal, da $n \geqslant m$)
Die Darstellung ist jeweils eindeutig, falls L regulär; S stets eindeutig.

Beweis. (a) Für $n \leqslant m$, L regulär $\Longrightarrow L^* L$ regulär. Setze $S = \sqrt{L^* L}$ symmetrisch, $R := LS^{-1}$ (regulär) $\Longrightarrow R^* R = \left(S^{-1}\right)^* L^* L S^{-1} = (S^*)^{-1} S^2 S^{-1} = \mathrm{id}_n$
(b) Betrachte (a) für L^*

■

Für $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear heißt $[L] := |\det S|$ mit S gemäß (5) / (6) **Jacobi-Determinante** (eindeutig definiert, da S eindeutig).
Offenbar:
(i) $[L] = [L^*]$

(ii) $$[L]^2 = \begin{cases} \det L^*L & n \leqslant m \\ \det LL^* & n \geqslant m \end{cases} \tag{8}$$
(denn für $n \leqslant m$: $L^*L = S^*R^*RS = S\,\mathrm{id}_n\,S = S^2$)

Binet-Cauchy-Formel $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leqslant m$. Sei $\Lambda := \{\det \tilde{L} \mid \tilde{L}$ entsteht aus L durch Streichen von $m-n$ Zeilen $\}$. Dann
$$[L]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda^2 \tag{9}$$
(beachte: $\tilde{L}$ sind gewisse Projektionen von L und (9) ist in gewissem Sinne Pythagoras, vgl. Literatur)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lip-stetig $\Longrightarrow$ $\mathrm{D}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear existiert für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \mathbb{R}^n$ mit
$$f = \left(f^1, \ldots, f^m\right) \Longrightarrow \mathrm{D}f = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^n_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$
Dabb heißt $\mathrm{J}_f(x) := [\mathrm{D}f(x)]$ für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \mathbb{R}^n$ **Funktionaldeterminante** (Jacobi-Determinante) von f in x. Offenbar gilt
$$\mathrm{J}_f(x) = \begin{cases} \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)} & n \leqslant m \\ \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)\mathrm{D}f(x)^*} & n \geqslant m \end{cases} \tag{10}$$

3.3 Area-Formel

Sei stets $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig und $\boxed{n \leqslant m}$

Ziel:

Berechne $\int_{f(A)} d\mathcal{H}^n$, d.h. n-dimensionales Maß von $f(A)$ (eventuell mit «Vielfachheit» falls f nicht surjektiv) bzw $\int_{f(A)} g\left(f^{-1}(y)\right)\, \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)$

□ **Lemma 3.5 (Vorbetrachtung)** *Es gilt*

(1) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear* $\Longrightarrow \mathcal{H}^n(L(A)) = [L]\mathcal{L}^n(A)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ *(wo* $[L]$ *Funktionaldeterminante)*

(2) $f(A)$ *ist* $\mathcal{H}^n$*-messbar* $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$*-messbar*

(3) **Vielfachheitsfunktion** $y \mapsto \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}(y)\right)$ *auf* $\mathbb{R}^m$ *ist* $\mathcal{H}^n$*-messbar auf* $\mathbb{R}^m$ $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$*-messbar*

(4)
$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}(y)\right) \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) = \underbrace{\int_{f(A)} \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}(y)\right) \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)}_{=\int_{f(A)} \mathrm{d}\mathcal{H}^n \text{ wenn f inj.}}$$
$$\leqslant (\mathrm{Lip}\, f)^n\, \mathcal{L}^n(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n\ \mathcal{L}^n\text{-messbar}$$

blob **Theorem 3.6** *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *L-stetig,* $n \leqslant m$*. Dann gilt die*

(1) *Area-Formel:*

$$\int_A \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}(y)\right) \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)}_{=\int_{f(A)} \mathcal{H}^0\left(A\cap f^{-1}(y)\right)\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)} \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n \ \mathcal{L}^n\text{-messbar} \tag{11}$$

(2) *Variablentranformation: Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)}_{=\int_{f(\mathbb{R}^n)} \sum_{x\in f^{-1}(y)} g(x)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y)}$$

Bemerkung (1) (11) folgt aus (12) für $g = \mathbb{1}_A$

(2) Wiederholung:

$$\mathrm{J}_f(x) = \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)} = \sqrt{\det g_{ij}(x)}, \text{ wo } g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

(3) Falls f in Theorem 3.6 injektiv, $g = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ folgt

$$\int_A \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x = \int_{f(A)} \mathrm{d}\mathcal{H}^n \ (= \mathcal{H}^n\left(f(A)\right)) \tag{11'}$$

$$\int_A g(x)\mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x = \int_{f(A)} g\left(f^{-1}(y)\right) \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) \tag{12'}$$

Beispiel 3.7 Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ L-stetig, injektiv, U offen, $n \leqslant m$. Betrachte $M := f(U)$ als n-dimensionle Lipschitz-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{B}^m$. Sei $B \subset M$ Borel-Menge, mit Hinweis nach Theorem 1.6 folgt $A := f^{-1}(B)$ $\mathcal{L}^n$-messbar, B $\mathcal{H}^n$-messbar. Sei $\tilde{g} : B \to \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^n$-summierbar und $g(x) := \tilde{g}(f(x))$ $\mathcal{L}^n$-messbar (z.B. $\tilde{g}$ stetig). Dann folgt:

$$\int_B \tilde{g}(y)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) = \int_{f(A)} g\left(f^{-1}(y)\right) \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) \tag{12}$$

$$= \int_A g(x)\mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$= \int A\tilde{g}(f(x))\sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)}\mathrm{d}x \tag{14}$$

und für $\tilde{g} = 1$:

$$\mathcal{H}^n(B) := \int_B \mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) = \int_A \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)}\mathrm{d}x \tag{15}$$

(a) **Spezialfall:** M C^1-Mannigfaltigkeit $\Longrightarrow$ O.E. f stetig differenzierbar mittels (13) Integration auf einer Mannigfaltigkeit definiert. Mittels (14) n-dimensionales Volumen $\mathrm{vol}_n(b)$ in $\mathbb{R}^m$ definiert.
Wiederholung für $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $\tilde{Q} := (\mathrm{D}f(x))(Q)$

$$\mathrm{vol}_n(\tilde{Q}) = \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)}\mathcal{L}^n(Q)$$

(b) **Spezialfall:** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismus. Dann

$$\Longrightarrow \mathrm{J}_f(x) = \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)} = |\det \mathrm{D}f(x)|$$

$$\overset{(13)}{\Longrightarrow} \int_B \tilde{g}(y)\mathrm{d}y = \int_A \tilde{g}(f(y))\,|\det \mathrm{D}f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ (Trafosatz)}$$

(c) **Spezialfall** $n = 1$**:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig, injektiv (Kurve im $\mathbb{R}^m$)

$$\Longrightarrow \mathrm{J}_f(x)\,|\mathrm{D}f(x)|$$

$$\Longrightarrow \text{ Kurve } c := f[a,b] \text{ hat Länge } \mathcal{H}^1(C) = \int_C \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \overset{(14)}{=} \int_a^b |\mathrm{D}f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(d) **Spezialfall** $m = n+1$**:** $f(x) := (x, g(x))$ für $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-stetig

$$\Longrightarrow M = f(U) = \mathrm{graph}(g,U) \text{ Hyperfläche im } \mathbb{R}^{n+1}, \text{ mit } \mathrm{D}f(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n \\ g_{x_1}\cdots g_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{J}_f(x) = \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^*\mathrm{D}f(x)} = \sqrt{1 + |\mathrm{D}g(x)|^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^n(M) = \int_U \sqrt{1 + |\mathrm{D}f(x)|^2}\mathrm{d}x$$

(e) **Spezialfall** $m = n+1$, d.h. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ L-stetig, injektiv.

$$\Longrightarrow M = f(U) \text{ ist Hyperfläche im } \mathbb{R}^{n+1} \text{ wo } \mathrm{D}f = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{n+1}_{x_1} & \cdots & f^{n+1}_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{J}_f(x)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial\left(f^1, \dots, f^{k-1}, f^{k+1}, \dots, f^{nn}\right)(x)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^n(M) \overset{(14)}{=} \int_U \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x \text{(Flächeninhalt)}$$

3.4 Coarea-Formel

Stets: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ L-stetig und $\boxed{n \geqslant m}$

Ziel:

Berechne $\int_A \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x$ bzw. $\int_A g(x)\mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x$ (g integrierbar) mittels «nichtlinearem Fubini»

Lemma 3.8 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Dann*

(1) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}\left(A \cap L^{-1}(y)\right)\mathrm{d}y = [L]\mathcal{L}^n(A)$

(2) $f(A)$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar

(3) $A \cap f^{-1}(y)$ ist $\mathcal{H}^{n-m}$-messbar für $\mathcal{L}^m$-f.a. $y \in \mathbb{R}^m$ (Beachte: $f^{-1}(y)$ abgeschlossen $\forall y$ und somit $\mathcal{H}^{n-m}$ messbar)

(4) $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}\left(A \cap f^{-y}(y)\right)$ ist $\mathcal{L}^m$-messbar

Theorem 3.9 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ L-stetig, $n \geqslant m$. Dann gilt die*

(1) Coarea-Formel:

$$\int_A \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x6 = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}\left(A \cap f^{-1}(y)\right)\mathrm{d}y}_{=\int_{f(A)} \mathcal{H}^{n-m}\left(A\cap f^{-1}(y)\right)\mathrm{d}y} \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n\ \mathcal{L}^n\text{-messbar} \tag{1}$$

(2) *Variablentranformation: Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar gilt. dass $g\big|_{f^{-1}(y)}$ $\mathcal{H}^{n-m}$-summierbar für $\mathcal{L}^m$-f.a. $y \in \mathbb{R}^m$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathrm{J}_f(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}(y)} g(z) \, \mathcal{H}^{n-m}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}y \tag{2}$$

Bemerkung (1) (1) folgt aus (2) mit $g = \mathbb{1}_A$

(2) Wiederholung: $\mathrm{J}_f(x) = \sqrt{\det \mathrm{D}f(x)^* \mathrm{D}f(x)}$

(3) (2) ist eine nicht-lineare Verallgemeinerung des Satzes von Fubini, denn für $f(x) = x_k$ ($x = (x_1, ..., x_n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) gilt $\mathrm{J}_f(x) = |\mathrm{D}f(x)| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_k = t} g(z) \, \mathcal{H}^{n-m}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x', t) \mathrm{d}x' \right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$(x', t) = (x_1, ..., t, ..., x_n)$ (t an k-ter Stelle) und das ist Fubini.

(4) $\mathcal{L}^n(A) = 0 \implies \mathcal{H}^{n-m}\left(A \cap f^{-1}(y)\right) = 0$ für $\mathcal{L}^m$-f.a. $y \in \mathbb{R}^m$ (z.B. $A = \{x \mid f$ nicht differenzierbar in $x\}$)

(5) Falls $\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{J}_f(x)}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar auf $\mathbb{R}^n$ folgt aus (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}(y)} \frac{g(z)}{\mathrm{J}_f(z)} \, \mathcal{H}^{m-n}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}z \tag{2'}$$

Beispiel 3) **Spezialfall** $A = \{\mathrm{J}_f = 0\}$

$$\implies \mathcal{H}^{n-m}\left(\{\mathrm{J}_f = 0\} \cap f^{-1}(y)\right) = 0 \text{ für } \mathcal{L}^m\text{-f.a. } y \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

Beachte $\mathrm{J}_f(x) = 0 \iff \mathrm{D}f(x)$ singulär (d.h. hat nicht vollen Rang). Vgl Theorem von Morse-Sard: $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit $k = 1 + n - m$

$$\implies \{\mathrm{J}_f = 0\} \cap f^{-1}(y) = \varnothing \text{ für } \mathcal{L}^m\text{-f.a. } y \in \mathbb{R}^m,$$

d.h. Menge der **singulären Werte** y von $f = \{y \mid \exists x : f(x) = y, \mathrm{D}f(x) \text{ singulär}\}$ ist $\mathcal{L}^m$-Nullmenge.

Somit ist (3) schwache Version des Theorems von Morse-Sard.

4) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-stetig, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar und

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}f| =: c > 0 \tag{4}$$

$$\int_{f > t} g(x) \mathrm{d}x = \int_t^\infty \left(\int_{f = s} \frac{g(z)}{|\mathrm{D}f(z)|} \, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}s \tag{5}$$

und das liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{f > t} g(x) \mathrm{d}x = - \int_{f = t} \frac{g(z)}{|\mathrm{D}f(z)|} \, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z) \text{ für } \mathcal{L}^1\text{-f.s. } t \tag{6}$$

Beweis von (5) Offenbar ist $\mathrm{J}_f = |\mathrm{D}f|$, Dann

$$\begin{aligned}\int_{f>t} g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{f>t\}} \frac{g(x)}{|\mathrm{D}f(x)|} \mathrm{J}_f(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{f=s} \frac{g(z)}{|\mathrm{D}f(z)|} \mathrm{J}_f(z) \mathbb{1}_{\{f>t\}}\, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_t^{\infty} \left(\int_{f=s} \frac{g(z)}{|\mathrm{D}f(z)|} \mathrm{J}_f(z)\, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}s\end{aligned}$$

■

speziell in Polarkoordinaten:

(i) $f(x) = |x|$, $t = 0$ in (5). Dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \int_{\partial B_r(0)} g(z)\, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}r \tag{7}$$

(ii) $f(x) = -|x|$, $t = -r$ in (6). Dann $|x| < r$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r(0)} g(x)\mathrm{d}x = \int_{B_r(0)} g(z)\, \mathcal{H}^{n-1}(\mathrm{d}z) \tag{8}$$

Beispiel Spezialfall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-stetig $\Longrightarrow \mathrm{J}_f = |\mathrm{D}f|$. Dann folgt mit (1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}f(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})\, \mathrm{d}t$$

(vgl. Coarea-Formel für BV-Funktionen).

4 BV-Funktionen

4.1 Motivation

$U = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$. Dann gilt für die Variation

$$V(t) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| : a < t_0 < t_1 < \ldots < t_b < b\right\} \tag{$*$}$$

f hat eine beschränkte Varation, falls $V(f) < \infty$.
Für f glatt:

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\mathrm{d}t$$

für sup in $(*)$: Wähle Extrempunkte von f als t_k, dann

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f'(s)|\,\mathrm{d}s$$

und damit

$$V(f) = \int_a^b |f'(s)|\,\mathrm{d}s$$

Ziel: $V(f)$ für $f \in L^1(U)$ vernünftig definiert.
Wieder f glatt:

$$\begin{aligned} V(f) &= \sup\left\{\int_U \varphi(s) f'(s)\mathrm{d}s : \varphi \in C_0(U),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_U \varphi(s) f'(s)\mathrm{d}s : \varphi \in C_0^1(U),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_U \varphi'(s) f(s)\mathrm{d}s : \varphi \in C_0^1(U),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} \qquad (**) \end{aligned}$$

Beobachtung: $(**)$ sinnvoll für $f \in L^1(U)$ *und* liefert $(*)$ für glatte f. Fall $n > 1$

$$\begin{aligned} V(f) &= \sup\left\{\int_U \varphi(x) \cdot \mathrm{D}f(x)\mathrm{d}x : \varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_U \varphi(x) \operatorname{div} f(x)\mathrm{d}x : \varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} \end{aligned}$$

.

4.2 Einführung

$U \subset \mathbb{R}^n$ sei stets offen.

Definition Für $f \in L^1(U)$ ist die **Totalvariation** auf U

$$\mathrm{TV}(f) := \sup\left\{\int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x)\mathrm{d}x : \varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\ \forall x \in U\right\} \in [0,\infty]$$

$$\mathrm{BV}(U) := \{f \in L^1(U) : \mathrm{TV}\, f < \infty\}$$

ist linearer Raum. $f \in BVU$ heißt **Funktion beschränkter Variation** (BV-Funktion) auf U

$$\mathrm{BV}_{loc}(U) = \{f \in L^1_{loc}(U) : f\big|_V \in \mathrm{BV}(V)\ \forall V \subset\subset U \text{ offen}\}$$

ist die Menge der Funktionen mit **lokal beschränkter Variation** auf U.
$M \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar hat **(lokal) endlichen Perimeter** in U, falls $\mathbb{1}_M \in \mathrm{BV}(U)$ ($\mathbb{1} \in \mathrm{BV}_{loc}(U)$).

bv-01 **Theorem 4.1 (Strukturtheorem)** *Sei $f \in \mathrm{BV}_{loc}(u)$. Dann existiert ein Radonmaß μ auf U und $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so dass $|\sigma(x)| = 1$ μ-f.ü. und es gilt*

$$\int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) \mathrm{d}x = -\int_U \varphi(x) \cdot \sigma(x) \mu(\mathrm{d}x) \quad \forall \varphi \in C^1_0(U, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Bemerkung (1) bedeutet, das Vektormaß $\mu \llcorner \sigma$ als Gradient von f im distributiven (schwachen) Sinn aufgefasst werden kann und somit ist (1) allgemeine Formel für partielle Integration.

$$|\mathrm{D}f| := \mu$$

heißt **Variationsmaß** von f und

$$\mathrm{D}f := \mu \llcorner \sigma$$

heißt **Ableitung** von f (ist Vektormaß!). Damit wird (1)

$$\int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) \mathrm{d}x = -\int_U \varphi \cdot \sigma \mathrm{d}\,|\mathrm{D}f| = -\int_U \varphi \cdot \mathrm{d}(\mathrm{D}f) \quad \forall \varphi \in C^1_0(U, \mathbb{R}^n) \tag{1'}$$

Falls $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(U)$ für $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt $|\partial E| := |\mathrm{D}\mathbb{1}_E|$ ($= \mu$)**Perimatermaß** von E und $|\partial E|\,(U)$**Perimeter** von E in U. Setze $\nu_E = -\sigma$, dann wird (1) für $f = \mathbb{1}_E$, $E \subset U$ zu

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_U \varphi \cdot \nu_E \mathrm{d}\,|\partial E| \quad \forall \varphi \in C^1_0(U, \mathbb{R}^n) \tag{2}$$

Beispiel (1) Sei $E \subset\subset U$ offen, ∂E Lip., $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < \infty$, ν die äußere Einheitsnormale

$$\Longrightarrow \int_E \operatorname{div} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \leqslant c\,\|\varphi\|_\infty \quad \varphi \in C^1_0(U, \mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow \mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}(U) \Longrightarrow E$ hat endlichen Perimeter

$$\Longrightarrow \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \int_U \varphi \cdot \nu_E \mathrm{d}\,|\partial E| \ \forall \varphi \in C^1_0$$

$\Longrightarrow \forall \varphi \in C_0$ (approximativ)

$$\Longrightarrow |\partial E| \llcorner \nu_E = \left(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E\right) \llcorner \nu$$

$$\Longrightarrow |\partial E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E,\ \nu_E = \nu$$

damit kann (2) als allgemeine Variante des Satzes von Gauß angesehen werden (vgl. später).
(1) liefert für $f, \mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(U)$

$$|\mathrm{D}f|\,(U) = \mathrm{TV}(f) \text{ und } |\partial E|\,(U) = \mathrm{TV}(\mathbb{1}_E)$$

Beweis von Theorem 1 Betrachte $L : C_0(U,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear mit

$$L(\varphi) := -\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx$$

Da $f \in \mathrm{BV}_{loc}$ folgt

$$\sup\left\{L(\varphi) \mid \varphi \in C_0(V,\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} =: c_v < \infty \quad \forall V \subset\subset U \text{ offen}$$

$\Longrightarrow |L(\varphi)| \leqslant c_v \|\varphi\|_\infty \ \forall \varphi \in C_0^1(V,\mathbb{R}^n)$.
Fixiere $K \subset U$ kompakt, wähle V offen mit $K \subset V \subset\subset U$ für $\varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt}\varphi \subset K$ existiert $\varphi_k \in C_0^1(V,\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \xrightarrow{c} \varphi$. Setze $\overline{L}(\varphi) := \lim k \to \infty L(\varphi_k)$ (nach $(*)$ existiert der Grenzwert und ist unabhängig von (φ_k))
$\Longrightarrow$ es existiert eindeutig lineare Fortsetzung $\overline{L} : C_0(U,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ von L und $\left|\overline{L}(\varphi)\right| \leqslant c_v \|\varphi\|_\infty$ falls $\operatorname{spt}\varphi \subset V \subset\subset U$
$\Longrightarrow \sup\{\overline{L}(\varphi) \mid \varphi \in C_0^(U,\mathbb{R}^n),\ \operatorname{spt}\varphi \subset K,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\} < \infty$
$\overline{\textit{Riesz}} \Longrightarrow \exists$ Radonmaß μ und $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ μ-messbar wie in der Behauptung. ∎

Bemerkung: Man kann zeigen $f \in \mathrm{BV}_{loc}(V)$ mit $\mathrm{D}u = 0 \Longrightarrow f = \text{const}$ f.ü. auf jeder Zusammenhangskomponente von U (4)
Dies motiviert für $f \in \mathrm{BV}(U)$:

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} := \|f\|_{L^1} + |\mathrm{D}f|(U) \tag{5}$$

betrachtet man übliche Äquivalenzklassen wie in $L^1(U)$, so ist dies die Norm in $\mathrm{BV}(U)$ und $\mathrm{BV}(U)$ ist damit ein Banachraum.

Beispiel $W^{1,1}_{loc}(U) \subsetneqq \mathrm{BV}_{loc}(U)$ (6)

mit $|\mathrm{D}f| = \mathcal{L}^n \llcorner |\mathrm{D}f(\cdot)|$ und $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{D}f(x)}{|\mathrm{D}f(x)|} & \mathrm{D}f(x) \neq 0 \\ 0 & \mathrm{D}f(x) = 0 \end{cases}$ (7)

Analog $W^{1,1}(\Omega) \subsetneqq \mathrm{BV}(U)$ (8)

Beweis. Sei $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$, dann gilt $\forall \varphi \in C_0^1(V,\mathbb{R}^n)$, $V \subset\subset U$, $|\varphi| \leqslant 1$.

$$\int_U f \operatorname{div} \varphi dx = -\int_U \varphi \cdot \mathrm{D}f dx \leqslant \int_V |\mathrm{D}f(x)| \, dx < \infty$$

$\Longrightarrow f \in \mathrm{BV}_{loc}(U)$. Nach $(*)$, (1):

$$\int_U \varphi \cdot \mathrm{D}f dx = \int_U \varphi \cdot \sigma d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow$ (7). Sei $B \subset\subset U \xRightarrow{Bsp1)} \mathbb{1}_B \in \mathrm{BV}_{loc}(U)$. Angenommen $\mathbb{1}_B \in W^{1,1}_{loc}(U)$.
$\xRightarrow{\text{Sobo.th.}} t \mapsto \mathbb{1}_B(x',t) = \mathbb{1}_B = (\ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots)$ stetig für $\mathcal{L}^{n-1}$-f.a. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ↯
$\Longrightarrow \mathbb{1}_B \notin W^{1,1}_{loc}(U) \Longrightarrow$ (6). ∎

4.3 Grundlegende Eigenschaften

bv-02 **Theorem 4.2 (Unterhalbstetigkeit der TV)** *Sei $f_k \in \mathrm{BV}(U)$ und $f_k \to f$ in $L^1_{loc}(U)$ (d.h. $f_k \xrightarrow{L^1(V)} f$ $\forall V \subset\subset U$. Dann ist $f \in \mathrm{BV}(U)$ und*

$$|\mathrm{D}f|(U) \leqslant \liminf_{k\to\infty} |\mathrm{D}f_k|(U)$$

Beweis. Für $\varphi \in C^1_0(U, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leqslant 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_U f \operatorname{div}\varphi \mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty} \int_U f_k \operatorname{div}\varphi \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_U \varphi \cdot \sigma_k \mathrm{d}\,|\mathrm{D}f_k| \\
&\leqslant \liminf_k \int_U \mathrm{d}\,|\mathrm{D}f_k| \\
&= \liminf_k |\mathrm{D}f_k|(U) \\
\Longrightarrow |\mathrm{D}f|(U) &= \sup\left\{ \int_U f \operatorname{div}\varphi \mathrm{d}x \,\middle|\, \varphi \in C^1_0(U,\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\
&= \liminf_k |\mathrm{D}f_k|(U)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. ■

bv-03 **Theorem 4.3 (Approximation durch glatte Funktionen)** *Für $f \in \mathrm{BV}(U)$ existiert Folgt $(f_k) \subset \mathrm{BV}(U) \cap C^\infty(U)$ mit*

(i) $f_k \to f$ *in* $L^1(U)$

(ii) $|\mathrm{D}f_k|(U) \to |\mathrm{D}f|(U)$

Für jede solche Folge (f_k) gilt $\mu_k \to \mu$ (im Sinne vektorwertiger Radonmaße vgl. Theorem 1.35), falls

$$\mu_k(B) := \int_{B\cap U} \mathrm{D}f_k \mathrm{d}x,\ \mu(B) := \int_{B\cap U} \mathrm{d}(\mathrm{D}f)$$

Beachte: I.A. gilt **nicht** $|\mathrm{D}(f_k - f)| \to 0$ *(bzw. $\|f_k - f\|_{\mathrm{BV}} \to 0$). ii) ist die schwächere Aussage!*

Vorbetrachtung zum Beweis: Glättung von Funktionen betrachte **Standard-Modifier** (Glättungsterm) $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\eta(x) := \begin{cases} c e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

und $c > 0$ so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$, setze $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\operatorname{spt}\eta_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$. Setze für $L^1_{loc}(U)$, $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon := \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) < \varepsilon\}$$

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f, \text{ d.h.}$$

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\mathrm{d}y \quad \forall x \in U_\varepsilon$$

bv-04 **Satz 4.4 (Glättung)** *(1)* $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, $f \in L^1_{loc}(U)$

(2) $f \in C(U) \Longrightarrow f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ *glm. auf kompakten Teilmengen* $\subset U$

(3) $f \in L^p_{loc}(U)$, $1 \leqslant p < \infty \Longrightarrow f^\varepsilon \to f$ *in* $L^p_{loc}(U)$

(4) $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$, $1 \leqslant p < \infty \Longleftarrow f^\varepsilon f$ *in* $W^{1,p}_{loc}(U)$ *und* $f^\varepsilon_{x_k} = \eta_\varepsilon * f_{x_k}$ $\forall k = 1, \ldots, n$

Bemerkung: Für $f \in \mathrm{BV}(U)$ liefert die Folge $f_k := \eta_{1/k} * f$ zwar i) aber eventuell nicht ii). Deshalb ist der Beweis aufwendiger!

Beweisskizze von Theorem 3. (1) Fixiere $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$U_k := \left\{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k}\right\} \cap B_{k+m}(0)$$

offen ($k = 1, 2, ds$) und offenbar $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|\mathrm{D}f|(U \setminus U_1) < \varepsilon \tag{$*$}$$

Sei $U_0 := \varnothing$ und $V_k := U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$ offene Mengen. Wähle Zerlegung der Eins $(\xi_k) \subset C_0^\infty(U)$ mit $\xi_k \in C_0^\infty(V_k)$, $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$, $\sum_k \xi_k(x) = 1$ $\forall x \in U$. Wähle $\varepsilon_k > 0$ so klein, dass $\forall k$: $\operatorname{spt}(\eta_\varepsilon * (f\eta_k)) \subset V_k$

$$\int_U |\eta_\varepsilon * (f\xi_k) - f\xi_k|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^k} \int_U |\eta_\varepsilon * (f\mathrm{D}\xi_k) - f\mathrm{D}\xi_k|\,\mathrm{d}x \qquad < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{$**$}$$

Setze:

$$f_\varepsilon := \sum_k \eta_{\varepsilon_k} * (f\xi_k) \tag{$\sharp$}$$

$\forall x \in U \exists U(x) \subset U$: nur endlich viele Terme $\neq 0$ auf $U(x)$ in ($\sharp$) $\Longrightarrow f_\varepsilon \in C^\infty(U)$.

(2) Wegen $f = \sum_k f\xi_k$ auf U und $(**)$ folgt

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(U)} \leqslant \sum_k \int_U \left|\eta_{\varepsilon_k} * (f\xi_k) - f\xi_k\right| \mathrm{d}x \leqslant \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow f_\varepsilon \to f \text{ in } L^1(U) \text{ für } \varepsilon \to 0 \tag{$+$}$$

(3) Man zeigt: $|\mathrm{D}f_\varepsilon|(U) \leqslant |\mathrm{D}f|(U) + 4\varepsilon$

$\overset{Thm.2}{\Longrightarrow} f_\varepsilon \in \mathrm{BV}(U)$

$\overset{(+)}{\Longrightarrow} |\mathrm{D}f|(U) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} |\mathrm{D}f_\varepsilon| \overset{(*)}{\leqslant} |\mathrm{D}f|(U)$

$\Longrightarrow ii)$

(4) Rest vgl. Literatur.

∎

bv-05 **Theorem 4.5 (Kompaktheit)** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, ∂U Lipschitz (lokal Graph einer Lipschitz-Funktion), $(f_k) \subset BV(U)$ mit*

$$\sup_k \|f_k\|_{BV(U)} < \infty.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{k_j})_j$ und $f \in BV(U)$ mit

$$f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f \text{ in } L^1(U)$$

Beweisskizze Nach Theorem 3 existiert $g_k \in BV(U) \cap C^\infty(U)$ $(\subset W^{1,1}(U))$ mit

$$\int_U |f_k - g_k|\,\mathrm{d}x < \frac{1}{k}, \quad \sup_k \int_U |\mathrm{D}g_k|\,\mathrm{d}x < \infty \tag{$*$}$$

$$\Longrightarrow \|g_k\|_{W^{1,1}} = \|g_k\|_{L^1} + \|g_k\|_{L^1} \text{ beschränkt} \tag{9}$$

Sobolevtheorie: $W^{q,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U)$, $1 \leqslant q \leqslant p* = \frac{np}{n-p}$ $(p < n)$.

$\Longrightarrow \exists$ TF $(g_{k_j})_j$ und $f \in L^1(U)$ mit $g_{k_J} \xrightarrow{j} f$ in $L^1(U)$

$\Longrightarrow f_{k_j} \xrightarrow{j} f$ in $L^1(U)$

$\overset{\text{Thm 2}}{\Longrightarrow} f \in BV(U)$ ∎

Beachte: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, ∂U Lipschitz. Dann folgt (Rademacher)

$$\text{äußere Einheitsnormale } \nu \text{ existiert } \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.ü. auf } \partial U \tag{10}$$

bv-06 **Theorem 4.6 (Spur)** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, ∂U Lipschitz. Dann*

(1) $\exists T : BV(U) \to L^1(\partial U, \mathcal{H}^{n-1})$ linear, beschränkt mit

$$\int_U f \operatorname{div} \varphi \mathrm{d}x = -\int_U \varphi \cdot \mathrm{d}(\mathrm{D}f) + \int_{\partial U} (\varphi \cdot \nu) T f \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall f \in BV(U),\ \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{11}$$

(2) Für $f \in BV(U)$ gilt:

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap U} |f(y) - Tf(x)|\,\mathrm{d}y = 0 \text{ für } \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.a. } x \in \partial U \tag{12}$$

und folglich

$$Tf(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)\cap U} f \mathrm{d}y \text{ für } \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.a. } x \in \partial U \tag{13}$$

Die Funktion $Tf(\cdot)$ heißt **Spur von** *f auf ∂U (Interpretation als Randwerte).*

Bemerkung (i) $f \in W^{1,1}(U) \subset BV(U)$: Tf mit Spur aus Sobolevtheorie identisch

(ii) $f \in BV(U) \cap C(\overline{U})$: $Tf = f|_{\partial U}$ $\mathcal{H}^{n-1}$-f.ü. (folgt aus (12))

(iii) φ in (10) nicht auf C^1_0 beschränkt (wie in Theorem 1)

(iv) $f = 1$ in (10), dann haben wir Gauß:

$$\int_U \operatorname{div} \varphi \mathrm{d}x = \int_{\partial U} \varphi \cdot \nu \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \varphi \in C^1 \tag{14}$$

bv-07 **Theorem 4.7** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, ∂U Lipschitz, $f_1 \in BV(U)$, $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U})$.*

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{auf } U \\ f_2(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \overline{U} \end{cases}$$

Dann ist $\overline{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$|Df|(\mathbb{R}^n) = |Df_1|(U) + |Df_2|(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}) + \int_{\partial U} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{15}$$

Folgerung 4.8 $U \subset \mathbb{R}^n$ *wie oben, dann:*

(1) $f \in BV(u)$, $\tilde{f} := f$ *auf* U *und* 0 *auf* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U} \Longrightarrow \tilde{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$

(2) U *hat endlichen Perimeter in* $\mathbb{R}^n$ *und* $|\partial U|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial U)$ *(wegen* $1 \in BV(U)$ *ist* $\mathbb{1}_U \in BV(\mathbb{R}^n)$ *und* $|D\mathbb{1}_U|(\mathbb{R}^n) = \int_{\partial U} d\mathcal{H}^{n-1}$*)*

Beweis von Theorem 7. Für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \operatorname{div} \varphi dx &= \int_U f_1 \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}} f_2 \operatorname{div} \varphi dx \\
&\overset{(10)}{=} -\int_U \varphi \cdot d(Df_1) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}} \varphi \cdot d(Df_2) + \int_{\partial U} (Tf_1 - Tf_2) \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} (*) \\
&\leqslant |Df_1|(U) + |Df_2|(U) + \int_{\partial U} |Tf_1 - Tf_2| \, d\mathcal{H}^{n-1}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \overline{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ und $\left|D\overline{f}\right|(\mathbb{R}^n) \leqslant$ r.S. in $(*)$.

Zeige Gleichheit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \operatorname{div} \varphi dx \overset{Thm1}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot d(D\overline{f}) \quad \forall \varphi \in C_0$$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left|D\overline{f}\right|(U) = |Df_1|(U)$, $\left|D\overline{f}\right|(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}) = |Df_2|(\mathbb{R}^n \setminus \overline{U})$ und

$$\left|D\overline{f}\right|(\partial U) = \int_{\partial U} |Tf_2 - Tf_1| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\Longrightarrow$ (14). ■

Ziel: Berechne $|Df|(U)$ mittels Niveaumengen ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz $\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |Df| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}\{f = t\} dt$)

bv-09 **Lemma 4.9** *Sei* $f \in BV(U)$, $E_t := \{x \in U \mid f(x) > t\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. *Dann ist* $t \mapsto |\partial E_t|(U)$ *ist* mL^1*-messbar auf* $\mathbb{R}$.

bv-10 **Theorem 4.10 (Coarea-Formel für BV-Funktionen)** *(1) Für* $f \in BV(U)$ *gilt:*

(i) E_t *hat endlichen Perimeter in* U *für* $\mathcal{L}^1$*-f.a.* $t \in \mathbb{R}$

(ii) Coarea-Formel

$$|Df(U)| = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial E_t|(U) dt \tag{16}$$

(2) Sei $f \in L^1(U)$ *und* $\int_{-\infty}^{\infty} |\partial E_t|(U) dt < \infty \Longrightarrow f \in BV(U)$.

Beweisskizze. (a) Zeige:

$$\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{E_t} \operatorname{div} \varphi \, dx \right) dt \; \forall f \in L^1(U),\ \varphi \in C_0^1(U, \mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1 \qquad (*)$$

Sei zunächst $f \geqslant 0$, dann

$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1 dt = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{E_t}(x) dt \text{ für f.a. } x \in U$$

und weiter

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_U \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{E_t}(x) dt \right) \operatorname{div}\varphi \, dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_U \mathbb{1}_{E_t}(x) \operatorname{div}\varphi \, dx \right) dt$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi \, dx \right) dt$$

Für $f \leqslant 0$ f.ü. folgt

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 (\mathbb{1}_{E_t}(x) - 1) dt$$

und

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi \, dx \right) dt$$

Für $f = f^+ - f^- \Longrightarrow (*)$

(b) $(*) \Longrightarrow \int_U f \operatorname{div}\varphi \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\partial E_t|(U) dt \ \forall f \in L^1,\ \varphi \in C_0^1,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1 \Longrightarrow 2)$ und

$$|Df|(U) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |E_t|(U) dt \text{ für } f \in BV(U) \qquad (**)$$

(c) Zeige:

$$\int_{-\infty}^\infty |E_t|(U) dt \leqslant |Df|(U)$$

erst für $f \in BV(U) \cap C^\infty(U)$, dann für $f \in BV(U) \Longrightarrow 1b) \Longrightarrow 1a)$

■

bv-11 **Theorem 4.11 (Einbettung)** *(i)* $\exists c > 0$ *mit* $\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c|Df|(\mathbb{R}^n)\ \forall f \in BV(\mathbb{R}^n)$ *und folglich* $BV(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$ *als Banachräume.*

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt,* ∂U *Lipschitz. Dann folgt*

$$\begin{aligned} BV(U) &\hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(U) \\ BV(U) &\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U) \forall 1 \leqslant q \leqslant \tfrac{n}{n-1} \end{aligned}$$

Beweis. zu (i) Sei $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{Thm 3}}{\exists} f_k \in (\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $|Df_k|(\mathbb{R}^n) \to |Df|(\mathbb{R}^n)$ $(*)$

$\Longrightarrow$ (eventuell mit TF) $f_k(x) \to f(x)$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow \exists c > 0 : \|f_k\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \underbrace{\|Df_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}_{|Df_k|(\mathbb{R}^n)}$ $(**)$

$$\Longrightarrow \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \liminf_k \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$= \liminf_k \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \overset{(**)}{\leqslant} c \liminf |Df_k|(\mathbb{R}^n)$$
$$\overset{(*)}{=} c|Df|(\mathbb{R}^n)$$

■

bv-12 **Theorem 4.12 (Isoperimetrische Ungleichung)** *Es existiert $c > 0$ (abhängig von x) mit*

$$\mathcal{L}^n(E)^{1\frac{1}{n}} \leqslant c\,|\partial E|\,(\mathbb{R}^n)$$

für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $|\partial E|\,(\mathbb{R}^n) < \infty$ (d.h. endlicher Perimeter in $\mathbb{R}^n$).

4.4 Reduzierter Rand

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (d.h. lokal endlicher Perimeter in $\mathbb{R}^n$)

Zur Erinnerung: $|\partial E|\,(U)$, $\nu_E(x) = -\sigma(x)$ (vgl. Theorem 1).

Definition Der **reduzierte Rand $\partial^* E$ von** E ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit

(i) $|\partial E|\,(B_r(x)) > 0\ \forall r > 0$

(ii) $\lim\limits_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} \nu_E(y)\,|\partial E|\,(\mathrm{d}y) = \nu(x)$

(iii) $|\nu_E(x)| = 1$

Bemerkung (1) Theorem 1.28 $\Longrightarrow$ (ii) gilt $|\partial E|$-f.ü. auf $\mathbb{R}^n$

(2) Theorem 1 $\Longrightarrow$ (iii) gilt $|\partial E|$-f.ü. auf $\mathbb{R}^n$

$$\Longrightarrow |\partial E|\,(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0, \tag{17}$$

d.h. $|\partial E|$ hat nur auf $\partial^* E$ Masse. Setze für $x \in \partial^* E$, $r > 0$:

$$\begin{aligned} H^\pm &:= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu_E(x), y - x\rangle \lesseqgtr 0\} \text{ Halbräume} \\ H(x) &= H^+(x) \cap H^-(x) \\ E_r(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : x + r(y - x) \in E\} \text{ (blow up)} \end{aligned} \tag{18}$$

bv-13 **Theorem 4.13 (blow up)** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \partial^* E$. Dann*

$$\mathbb{1}_{E_r(x)} \xrightarrow{r\to 0} \mathbb{1}_{H^-(x)} \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Interpretation: *Für $r > 0$ klein wird $E \cap B_r(x)$ durch $H^-(x) \cap B_r(x)$ approximiert und $\nu_E(x)$ kann als äußere Normale an E angesehen werden, $H(x)$ als Tangentialebene.*

Folgerung 4.14 *Für $x \in \partial^* E$ gilt:*

(a) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n\left(B_r(x) \cap E \cap H^+(x)\right)}{r^n} = 0$ *und* $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n\left((B_r(x) \setminus E) \cap H^-(x)\right)}{r^n} = 0$

(b) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{|\partial E|\,(\overline{B_r(x)})}{\omega_{n-1} r^{n-1}} = 1$ *(ω_{n-1} Volumen von $B_1(0)$ auf $\mathbb{R}^n$)*

Definition Der Einheitsvektor $\nu_E(x)$ mit a) heißt **maßtheoretische Einheitsnormale** von E in x.

bv-14 **Theorem 4.15 (Perimeter-Maß)** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$|\partial E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E.$$

Erinnerung: $\partial_* E = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \mathrm{dens}_A(x) < 1\}$ ist der maßtheoretische Rand.

bv-15 **Satz 4.16** *Für $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt*
(a) $\partial^* E \subset \partial_* E$
(b) $\mathrm{dens}_E(x) = \frac{1}{2}\ x \in \partial^* E$
(c) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$
(d) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty\ \forall K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt*
(e) Für $\mathcal{H}^{n-1}$-f.a. $x \in \partial_* E$ existiert eindeutig eine maßtheoretische Einheitsnormale $\nu_E(x)$

bv-16 **Theorem 4.17** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann*
$$\int_E \mathrm{div}\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

Beweis. Es gilt
$$\int_E \mathrm{div}\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_E \mathrm{div}\,\varphi\,\mathrm{d}x \overset{\text{Thm 1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_E(x)\,\mathrm{d}\,|\partial E|,$$
wegen $|\partial E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$ nach Theorem 14 und wegen Satz 15 folgt $|\partial E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E$. Damit folgt die Behauptung. ■

4.5 Anwendung auf Eigenwertprobleme

Motativation: $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, $1 < p < \infty$. Wollen
$$E(u) := \int_\Omega |\mathrm{D}u|^p\,\mathrm{d}x \longrightarrow \min \quad \text{wo } u \in W^{1,p}(\Omega),\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \qquad (1)$$ bvE-5-1

mit Nebenbedingung: $G(u) := \int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x = 1$ (**Variationsproblem**).

Existenz: Für jedes $p \in (1, \infty)$ existiert Minimallösung $\tilde{u}$ von (1).
Notwendige Bedingung: Langrangesche Multiplikatorenregel in schwacher Form liefert:
$$\exists \lambda > 0 : \int_\Omega |\mathrm{D}\tilde{u}|^{p-2}\,\mathrm{D}\tilde{u} \cdot \mathrm{D}v\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |\tilde{u}|^{p-2}\,\tilde{u}v\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (2)$$ bvE-5-2
$$\left(\nabla |w|^p = p\,|w|^{p-1}\,\frac{w}{|w|},\ \langle E'(\tilde{u}) - \lambda G'(\tilde{u}), v\rangle = 0\ \forall v\right)$$

$v = \tilde{u}$ liefert: $E(\tilde{u}) - \lambda \underbrace{G(\tilde{u})}_{=1} = 0 \Longrightarrow \lambda = E(\tilde{u})$. Falls $\tilde{u}$ glatt, folgt
$$-\int_\Omega \left(\mathrm{div}\,|\mathrm{D}\tilde{u}|^{p-2}\,\mathrm{D}\tilde{u} - \lambda\,|\tilde{u}|^{p-2}\,\tilde{u}\right) v\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$$
Also
$$-\mathrm{div}\,|\mathrm{D}\tilde{u}|^{p-2}\,\mathrm{D}\tilde{u} = \lambda\,|\tilde{u}|^{p-2}\,\tilde{u} \quad \text{auf } \Omega \qquad (2')$$ bv-5-2’

ist eine partielle Differentialgleichung im distributiven (schwachen) Sinne.

Regularität: $\tilde{u} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$

Spezialfall $p = 2$: $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$, d.h.

$$(2) \iff \boxed{-\Delta u = \lambda u} \text{ auf } \Omega$$

ist ein Eigenwertproblem für den Laplace-Operator.
Notation: $\Delta_p u := \operatorname{div} |\mathrm{D}u|^{p-2} \mathrm{D}u$ heißt p**-Laplace-Operator**.

(2′) heißt dann Eigenwertproblem für den p-Laplace-Operator (insbesondere nicht linear!)

Suchen: «Sattelpunkte» = kritische Punkte ($E'(u) - \lambda G'(u) = 0$). Beachte Symmetrie: $E(u) = E(-u)$, $G(u) = G(-u)$.
$\Longrightarrow$ Theorie kritischer Punkte mit Symmetrie (Ljusternik-Schmirelman-Theorie) liefert Folge (u_k) von Sattelpunkten von E bzgl. $\{G(v) = 1\}$.
$\Longrightarrow$ es gibt eine Folge von Eigenlösungen u_k, $\lambda_k > 0$, $-\Delta_p u_k = \lambda_k |u_k|^{p-2} u_k$ auf Ω mit $\lambda_k \to \infty$ $(1 < p < \infty)$.

Grenzfall $p = 1$ Eigenwertproblem für 1-Laplceoperator

$$E(u) = \int_\Omega |\mathrm{D}u| \, \mathrm{d}x \to \text{ min!}, \; W^{1,1}(\Omega), \; u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\text{NB: } G(u) = \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}x = 1$$

Schwierigkeiten:
Existenz:

$W^{1,1}(\Omega)$ *nicht* reflexiv $\Longrightarrow$ bisherige Methoden nicht anwendbar
Eigenlösungen u_1^p «konvergieren» für $p \to 1$ gegen Indikatorfunktionen $u = \frac{1}{|c|}\mathbb{1}_C \notin W^{1,1}(\Omega)$ $(C \subsetneq \Omega)$
$\Longrightarrow$ **keine** Existenz in $W^{1,1}(\Omega)$ und Schwierigkeiten mit Randbedingungen!

notwendige Bedingung $\frac{\mathrm{D}u}{|\mathrm{D}u|}$, $\frac{u}{|u|}$ *nicht* definiert für $\mathbb{1}_C$!
$\Longrightarrow$ größerer Raum für Existenz
$\Longrightarrow$ allgemeinere Methode für notwendige Bedingung

Vorbetrachtung Betrachte Vektorfelder $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit «guter» Divergenz. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz. $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ hat **distributionelle Divergenz** in $L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, falls $g \in L^q(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega z \cdot \mathrm{D}\varphi \, \mathrm{d}x = -\int \operatorname{div} z g \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3}$$

Notation $\quad \operatorname{Div} z = g$, $L^\infty_q(\Omega) = \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Div} z \in L^q(\Omega)\}$ (4)

bv-5-01 **Satz 4.18** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, $z \in L^\infty_q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Dann existiert die so genannte* **Normalenspur von** *z*

$$[z, \nu] \in L^\infty(\partial\Omega) \text{ mit } \|[z,\nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leqslant \|z\|_{L^\infty} \tag{5}$$ bvE-05

und

$$\int_\Omega u \operatorname{Div} z \, \mathrm{d}x + \int_\Omega z \cdot \mathrm{D}u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega [z,\nu] \mathrm{S}u \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^q(\Omega), \tag{6}$$ bvE-06

wo S*u der Spuroperator von u.*

Beweis. Siehe online: Kawohl und Schuricht. ∎

Frage $\quad$ Kann (6) auf BV-Funktionen erweitert werden? Problem 2. Term.

bv-5-02 **Satz 4.19** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, $z \in L^\infty_n(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein Radonmaß $(z, \mathrm{D}u)$ auf Ω mit*

$$\int_\Omega u \operatorname{Div} z \, \mathrm{d}x + \int_\Omega d(z, \mathrm{D}u) = \int_{\partial\Omega} [z,\nu] \mathrm{S}u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \tag{7}$$ bvE-07

Für beliebige $\tilde\Omega \subset \Omega$ offen gilt:

$$\left| \int_{\tilde\Omega} \varphi \, \mathrm{d}(z, \mathrm{D}u) \right| \leqslant \|\varphi\|_c \, \|z\|_{L^\infty(\tilde\Omega)} \int_{\tilde\Omega} \mathrm{d}\,|\mathrm{D}u| \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\tilde\Omega)$$

$$\left| \int_{\breve\Omega} \mathrm{d}(z, \mathrm{D}u) \right| \leqslant \int_{\breve\Omega} \mathrm{d}\,|(z, \mathrm{D}u)| \leqslant \|z\|_{L^\infty(\tilde\Omega)} \int_{\tilde\Omega} \mathrm{d}\,|\mathrm{D}u| \quad \forall \breve\Omega \in \mathcal{B}(\tilde\Omega) \text{ Borel}$$

Beweis. Siehe: Anzelotti, Kawohl und Schuricht. ∎

Eigenwertproblem für 1-Laplaceoperator

$$E(u) := \int_\Omega \mathrm{d}\,|\mathrm{D}u| + \int_{\partial\Omega} \left| \underbrace{u^{\partial\Omega}}_{=\mathrm{S}u} \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \right| \to \text{ min!} \quad \big(u \in \mathrm{BV}(\Omega)\big) \tag{8}$$ bvE-08

$$G(u) := \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}x = 1$$

hier sei stets: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz.

Beachte $\quad$ Oberflächenintegral in E aber keine Randbedingung $\longrightarrow$ ist äquivalent zu verallgemeinerter Randbedingung, denn sei

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \xRightarrow{\text{Thm 4.27}} \overline{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$|\mathrm{D}\overline{u}|\,(\mathbb{R}^n) = |\mathrm{D}u|\,(\Omega) + \int_{\partial\Omega} \left|u^{\partial\Omega}\right| \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = E(u)$$

somit ist folgendes Problem äquivalent zu (8):

$$F(v) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\,|Dv| \to \text{ min!} \quad \big(v \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)\big) \tag{8'}$$ bvE-08'

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|\,\mathrm{d}x = 1,\ v(x) = 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

(verallgemeinerte RB bleibt unter L^1-Konvergenz erhalten!)

Frage Existenz einer Minimallösung?

bv-5-03 **Theorem 4.20** *Ω wie üblich, dann besitzt (8′) eine Minmallösung.*

Beweis. Zeige, dass (8′) Lösung v besitzt, dann ist $v\big|_\Omega$ Lösung von (8). Offenbar existiert zulässige Funktion

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega|} & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow \exists$ Minimalfolge $(v_n) \subset \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_n F(v_n) = \inf_{v \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n) \text{ zul.}} F(v) < \infty$

$\overset{Poincar}{\Longrightarrow}$ (v_n) beschränkt in $L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, wegen RB und $L^{\frac{n}{n-1}} \hookrightarrow L^1(\Omega)$ ist $(v_n\big|_\Omega)$ beschränkt in $L^1(\Omega)$

$\Longrightarrow (v_n\big|_\Omega)$ beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$ (beachte: $v_n\big|_\Omega \in \mathrm{BV}(\Omega)$)

$\overset{\text{Thm. 4.2.5}}{\Longrightarrow}$ (eventuell für TF) $v_n\big|_\Omega \to v \in \mathrm{BV}(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$. Identifziere v mit zugehöriger Nullfortsetzung auf $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow v_n \to v$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$

$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |v|\,\mathrm{d}x = 1$, $v(x) = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ (d.h. v zulässig)

$\overset{\text{Thm 4.2.2}}{\Longrightarrow} F(v) = |Dv|\,(\mathbb{R}^n) \leqslant \liminf |Dv_n|\,(\mathbb{R}^n) = F(v_n) = \inf_v F(v)$

$\Longrightarrow v$ ist Minimallösung von (8′) ■

Frage Notwendige Bedingung, Euler-Lagrange-Gleichungen?

Schwierigkeiten:

Struktur von BV^* unbekannt

E, F, G *nicht* differenzierbar

Ausweg **Nichtglatte Analysis** Durch Trick reicht konvexe Analysis für nichtkonvexes $\rightsquigarrow$ liefert i.A. unendlich viele ELG!

Offenbar $\mathrm{BV}(\Omega) \subset L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$, $\left(L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)\right)^* = L^n(\Omega)$

Erweiterung von (8) auf $X := L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$

$$E(u) := \begin{cases} \int_\Omega \mathrm{d}\,|\mathrm{D}u| + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} & \text{für } u \in \mathrm{BV}(\Omega) \\ +\infty & \text{für } X - \mathrm{BV}(\Omega) \end{cases} \tag{9}$$ bvE-10

$$G(u) = \int_\Omega |u|\,\mathrm{d}x \text{ wohldefiniert auf } X$$

Für (belibige) konvexe Funktionen $E : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (X-B-Raum) definiert man das Subdifferential $\partial E(u)$ in $u \in X$ durch

$$\partial E(u) := \{e^* \in X^* \mid \langle e^*, v - u\rangle \leqslant E(v) - E(u)\ \forall v \in X\} \tag{10}$$ bvE-11

Hinweis (10) impliziert leicht $E(v_0) = \min_{v \in X} \Longleftrightarrow o \in \partial E(u_0)$

Beachte (8) ist Problem mit NB, d.h. Lagrange Multiplikatorenregel erforderlich! Offenbar gilt für E, G aus (9):

$$E, G : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ konvex, 1-homogen } (E(tu) = \tilde{t}E(u)) \tag{11}$$ bvE-12

$$E(v) > 0, G(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$$

bv-5-04 **Satz 4.21** *Seien E, G (bel.) Funktionen auf (bel.) Raum X mit (11) und $E(u) = \min_{G(v)=1} E(v)$. Dann ist $\lambda \partial G(u) \subset \partial E(u)$ für $\lambda := E(u) > 0$, d.h. $\forall g^* \in \partial G(u) \exists e^* \in \partial E(u) : e^* = \lambda g^*$.*