Differentialgeometrie

Prof. Dr. U. Brehm
Robert Baumgarth

TU Dresden
Fakultät Mathematik
Institut für Geometrie

Mitschrift

SS 2011 & WS 2011/12

1. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgeometrie I **4**

I Kurven im $\mathbb{R}^n$ 4

1 Lokale Kurventheorie (Frenet-Kurven) 4

2 Globale Kurventheorie 12

II Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$, lokale Flächentheorie 16

3 Flächenstücke und 1. Fundamentalform 16

4 Die zweite Fundamentalform von Hyperflächen und Krümmungen 19

5 Die innere Geometrie von Hyperflächen 40

6 Die kovariante Ableitung, Parallelverschiebung und Geodätische 46

2 Differentialgeometrie II **52**

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 52

2 Tangentialraum und Vektorfelder 55

3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten 65

4 Lie-Gruppen 84

5 Hausaufgaben und Übungen 98

5.1 Übungsblatt 1 98

5.2 Übungsblatt 2 99

5.3 Übungsblatt 3 102

5.4 Übungsblatt 4 103

5.5 Übungsblatt 5 104

5.6 Übungsblatt 6 106

Index 108

Bezeichnungen und Definitionen aus der Analysis

Betrachte $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i \leqslant n} x_i y_i, \text{ wo } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

und euklidischer Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$.

Zwei geordnete Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ und $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_n)$ heißen **gleich orientiert**, falls die Übergangsmatrix S von B nach $\tilde{B}$ eine positive Determinante besitzt, d.h.

$$\tilde{b}_j = \sum_{i \leqslant n} s_{ij} b_i, \quad S = (s_{ij})_{i,j}, \det S > 0$$

Eine geordnete Basis heißt **positiv orientiert**, falls sie gleich orientiert ist, wie die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Zur Differentiation im $\mathbb{R}^n$

Bezeichne $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ linear } \}$. Dies ist in natürlicher Weise ein $n \cdot m$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar in** $x_0 \in U$, wenn

$$\exists L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Schreibweise dafür: $\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\| = o\left(\|x - x_0\|\right)$ für $x \to x_0$.
Falls f differenzierter in x_0, ist diese lineare Abbildung L eindeutig bestimmt und wird mit $\mathrm{D}f_{x_0}$ bezeichnet. $\mathrm{D}f_{x_0}$ heißt das **Differential von** f **in** x_0.

Es gilt (vgl. Analysis):
(a) Falls $f : U \to \mathbb{R}^n$ in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.
(b) Falls die partiellen Ableitungen in U existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

$f \in C^r$ heißt f ist r-mal stetig differenzierbar (d.h. alle r-fachen partiellen Ableitungen existieren und sind stetig). Gilt $f \in C^r$, so sind die partiellen Ableitungen bis zur r-fachen Ableitung vertauschbar.

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, bedeutet $f : A \to \mathbb{R}^m \in C^k$, dass es $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $A \subset U$ und $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^m$ gibt mit $\overline{f} \in C^k$ mit $\overline{f}\big|_A = f$. Für $f = (f_1, ..., f_n)^T$ definiere

$$\mathrm{D}f\big|_u \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_u & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_u \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_u & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_u \end{pmatrix}}_{\substack{\mathrm{J}_f(u) \text{ Funktionalmatrix, Jacobi-} \\ \text{Matrix von } f \text{ an der Stelle } u}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Kettenregel in der Schreibweise Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $f, g \in C^1$, $u \in U$. Dann gilt

$$\mathrm{D}(g \circ f)_u = \mathrm{D}g_{f(u)} \circ \mathrm{D}f_u$$

Partielle Ableitung Für $f(x_1, ..., x_n)$ definiere $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_u = \mathrm{D}f_u(e_i) \in \mathbb{R}^m$, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor.
Für $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$ ist $\mathrm{D}f_u(e)$ die **Richtungsableitung** von f an der Stelle u in Richtung e.

Satz über Umkehrfunktion Sei $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^r$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathrm{D}f_u : U \to \mathbb{R}^n$ bijektiv, dann gibt es offene Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von u so, dass $f|_{\tilde{U}}^{f(\tilde{U})}$ bijektiv ist und $\left(f|\right)^{-1} \in C^r$ ist und

$$\mathrm{D}\left(f|^{-1}\right)_{f(u)} = (\mathrm{D}f)_u^{-1}$$

Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m \in C^1$ und $m \geqslant n$. f heißt **regulär in** $u \in U$, falls $\mathrm{D}f_u$ injektiv ist. f heißt **regulär**, falls f in allen $u \in U$ regulär.

Es sind äquivalent, für $f \in C^1$

(i) f regulär in u
(ii) $\operatorname{rg} \mathrm{D}f_u = n$
(iii) die partiellen Ableitungen $\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_u$ sind linear unabhängig

Seien U, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ heißt ein **Diffeomorphismus**, falls $f \in C^1$, bijektiv und regulär ist.

1 Differentialgeometrie I

I Kurven im $\mathbb{R}^n$

1 Lokale Kurventheorie (Frenet-Kurven)

Definition Eine **parametrisierte (C^k-)Kurve** ist eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($k \geqslant 1$), wo I ein Intervall. Die Kurve heißt **regulär**, falls $\dot{c}(t) := \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Definition Eine **reguläre Parametertransformation** ist eine bijektive C^1-Abbildung $\varphi : I \to I'$ (I, $I' \subset \mathbb{R}$ Intervalle) mit $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
Sie heißt **orientierungserhaltend**, falls $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in I$, bzw. **orientierungsumkehrend**, falls $\dot{\varphi}(t) < 0$ für alle $t \in I$.

Definition Eine **reguläre Kurve** ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven unter orientierungserhaltenden regulären Parametertransformationen (dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation definiert, ist leicht zu zeigen).

Interpretation: $\dot{c}(t)$ Momentangeschwindigkeit, $\|\dot{c}(t)\|$ Betrag der Geschwindigkeit.

Beispiel Betrachte

$$c(t) := \begin{cases} (t^{10}, 0) & \text{für } t \leqslant 0 \\ (0, t^{10}) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

ist eine parametrisierte C^9-Kurve, aber *nicht* regulär (für $t = 0$).

Um solche «Knicks» zu vermeiden, betrachten wir im Folgenden nur reguläre parametrisierte Kurven. Schreiben kurz: Kurve.

Definition Die **Länge** einer parametrisierten Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Bemerkung Es gilt

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Das wäre der angemessene Längenbegriff auch für $c \in C^0$ (also singulär), wobei dann auch der Wert ∞ möglich ist.

Definition Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ **nach Bogenlänge parametrisiert**, falls $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

urven-01 **Satz 1.1** *Jede reguläre Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ lässt sich nach Bogenlänge parametrisieren.*

Beweis. Sei $l = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, \mathrm{d}t$. Definiere

$$s : [a,b] \to [0,l],\ s(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau,$$

Dann ist offenbar $\dot{s}(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Also ist s bijektiv, regulär, orientierungserhaltend und $s \in C^1$. Also gibt es die Umkehrfunktion $\varphi := s^{-1}$ mit den selben Eigenschaften, somit ist φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation.
$c \circ \varphi : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ ist nach Bogenlänge parametrisiert, denn

$$(c \circ \varphi)^\bullet(s_0) = \dot{c}(\varphi(s_0))\dot{\varphi}(s_0) = \frac{\dot{c}(\varphi(s_0))}{\dot{s}(\varphi(s_0))} = \frac{\dot{c}(\varphi(s_0))}{\|\dot{c}(\varphi(s_0))\|},$$

also $\|(c \circ \varphi)^\bullet(s_0)\| = 1$ für alle $s_0 \in [0,l]$. ■

urven-02 **Lemma 1.2 (und Definition)** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt eine* **Frenet-Kurve**, *falls $c \in C^n$ und $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind für alle $t \in I$. Das begleitende* **Frenet n-Bein** *$e_1, \ldots, e_n : I \to \mathbb{R}^n$ ist dann eindeutig bestimmt, durch folgende Eigenschaften für alle $t \in I$:*

(i) $\big(e_1(t), \ldots, e_n(t)\big)$ sind eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
(ii) Für alle $k = 1, \ldots, n-1$ ist $\mathrm{Lin}\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\} = \mathrm{Lin}\{\dot{c}(t), \ldots, c^{(k)}(t)\}$.
(iii) $\big\langle c^{(k)}(t), e_k(t)\big\rangle > 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$.

Ferner gilt: Falls $c \in C^m$ $(m \geqslant n)$, dann ist $e_i \in C^{m-i}$ und $e_n \in C^{m-n+1}$.

Beweis. Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren:

$$\begin{aligned}
e_1(t) &:= \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\
e_2(t) &:= \frac{\ddot{c}(t) - \langle \ddot{c}(t), e_1(t)\rangle e_1(t)}{\|\ddot{c}(t) - \langle \ddot{c}(t), e_1(t)\rangle e_1(t)\|} \\
&\vdots \\
e_k(t) &:= \frac{c^{(k)}(t) - \sum_{i \leqslant k-1} \big\langle c^{(k)}(t), e_i(t)\big\rangle e_i(t)}{\Big\|c^{(k)}(t) - \sum_{i \leqslant k-1} \big\langle c^{(k)}(t), e_i(t)\big\rangle e_i(t)\Big\|} \quad (k \leqslant n-1)
\end{aligned}$$

Der letzte Vektor ist eindeutig bestimmt durch (i). Die Differenzierbarkeitsordnung ergibt sich aus der Konstruktion. ■

Bemerkung Für $n = 3$ ist $e_3 = e_1 \times e_2$. Allgemein gilt:

$$e_n = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \ldots, e_{n-1}, b_i) b_i,$$

wobei $(b_1, \ldots, b_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ sei.

urven-03 **Satz 1.3 (und Definition)** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $c \in C^m$ $(m \geqslant n)$ mit Frenet n-Bein $e_1, \ldots, e_n$. Dann gilt für $\kappa_i : I \to \mathbb{R}$*

$$\kappa_i := \frac{1}{\|\dot{c}\|} \langle \dot{e}_i, e_{i+1}\rangle \in C^{m-i-1} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

und $\kappa_1, ..., \kappa_{n-2} > 0$. Als Matrix geschrieben

$$\begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}^\bullet = \|\dot{c}\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & \\ -\kappa_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \kappa_{n-1} \\ & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix},$$

d.h. $\dot{e}_i = \|\dot{c}\| \left(-\kappa_{i-1} e_{i-1} + \kappa_i e_{i+1}\right)$ für $i = 1, ..., n$, wobei $\kappa_0 := 0$ und $\kappa_n := 0$.
κ_i heißt die i-te **Frenet-Krümmung** *und die Gleichungen heißen die* **Ableitungsgleichungen**. *Die 1. Frenet-Krümmung κ_1 heißt auch* **Krümmung** *von c. Im Fall $n = 3$ heißt $\tau := \kappa_2$ die* **Torsion von** *c.*

Beweis. Für jedes $i \leqslant n-1$ ist $e_i \in \operatorname{Lin}\{\dot{c}, ..., c^{(i)}\}$ $(t \in I)$, also $\langle \dot{e}_i, e_{i+2} \rangle = ... = \langle \dot{e}_i, e_n \rangle = 0$. Die Schiefsymmetrie der Matrix folgt daraus, dass $(e_1, ..., e_n)$ eine ONB sind:

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij} \Longrightarrow \left\langle \dot{e}_i, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \dot{e}_j \right\rangle \Longrightarrow \left\langle \dot{e}_i, e_j \right\rangle = -\left\langle e_i, \dot{e}_j \right\rangle$$

Damit gilt die Gleichung mit $\kappa_i := \frac{1}{\|\dot{c}\|} \langle \dot{e}_i, e_{i+1} \rangle$. Wegen $c \in C^m$ gilt $\dot{e}_i \in C^{m-i-1}$; $e_{i+1} \in C^{m-i-1}$ folgt $\kappa_i \in C^{m-i-1}$.
Zeigen noch $\kappa_i > 0$ für $i \leqslant n-2$:

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow c^{(i)} - \left\langle e_i, c^{(i)} \right\rangle e_i \in \operatorname{Lin}\{e_1, ..., e_{i-1}\} \\
&\Longrightarrow c^{(i+1)} - \left\langle e_i, c^{(i)} \right\rangle^\bullet e_i - \left\langle e_i, c^{(i)} \right\rangle \dot{e}_i \in \operatorname{Lin}\{e_1, ..., e_i\} \\
&\Longrightarrow \left\langle c^{(i+1)}, e_{i+1} \right\rangle - \left\langle e_i, c^{(i)} \right\rangle \langle \dot{e}_i, e_{i+1} \rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \|\dot{c}\| \kappa_i = \langle \dot{e}_i, e_{i+1} \rangle = \frac{\left\langle c^{(i+1)}, e_{i+1} \right\rangle}{\left\langle c^{(i)}, e_i \right\rangle} > 0 \text{ nach Voraussetzung (beachte } i \leqslant n-2).
\end{aligned}$$

■

Definition Der *j*-**dimensionale Schmiegraum** von c an der Stelle t (oder durch $c(t)$) ist der j-dimensionale affine Unterraum

$$c(t) + \operatorname{Lin}\{e_1(t), ..., e_j(t)\} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Für $j = 1$ heißt er **Tangente**, für $j = 2$ **Schmiegebene**, $j = n$ **Schmieghyperebene**.
$e_1(t)$ heißt **Tangenteneinheitsvektor**, $e_2(t)$ **Hauptnormalenvektor**. Im Fall $n = 3$ heißt $e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$ **Binormalenvektor**.
Andere übliche Bezeichungen: $\tau(t) = e_1(t)$, $n(t) = e_2(t)$, $b(t) = e_3(t) = \tau(t) \times n(t)$.

Kurven-04 **Satz 1.4 (Invarianz unter Umparametrisierungen)** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve, $\varphi : \tilde{I} \to I \in C^n$ eine reguläre Paramtertransformation. Seien $\tilde{c} := c \circ \varphi$, $e_j(t)$ bzw $\tilde{e}_j(t)$ und $\kappa_i(t)$ bzw. $\tilde{\kappa}_i(t)$ die begleitenden n-Beine und Krümmungen von c bzw. $\tilde{c}$. Dann gilt für alle $t \in \tilde{I}$:*
a) Falls φ orientierungserhaltend

$$\tilde{e}_j(t) = e_j(\varphi(t)),\ \tilde{\kappa}_i(t) = \kappa_i(\varphi(t))$$

b) Falls φ orientierungsumkehrend

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_j(t) = (-1)^j e_j(\varphi(t)) \text{ für } j \leqslant n,\ \tilde{\kappa}_j(t) = \kappa_j(\varphi(t)) \text{ für } j \leqslant n-2, \\
&\tilde{e}_n(t) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_n(\varphi(t)),\ \tilde{\kappa}_{n-1} = (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \kappa_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Beweis. a) und b): Sei $\tilde{c} = c \circ \varphi$, $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$, also

$$\tilde{e}_1(t) = \frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\left\|\dot{\tilde{c}}(t)\right\|} = \frac{\dot{c}(\varphi(t))'}{\|\dot{c}(\varphi(t))'\|} \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} = e_1(\varphi(t)) \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|}$$

Durch Induktion folgt für $j = 2, ..., n-1$ $\tilde{c}^{(j)}(t) = \left(c^{(j)}(\varphi(t))\right)(\dot{\varphi}(t))^j$ und Linearkombinationen aus $\left(\tilde{c}^{(i)}(\varphi(t))\right)$ für $i = 1, ..., j-1$, also für φ orientierungserhaltend $\tilde{e}_j(t) = e_j(\varphi(t))$ für $j = 1, ..., n$ und $\tilde{\kappa}_j(t) = \kappa_j(\varphi(t))$. Für φ orientierungsumkehrend $\tilde{e}_j(t) = (-1)^j e_j(\varphi(t))$ für $j = 1, ..., n-1$. Wegen $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n$ und $e_1, ..., e_n$ positiv orientiert muss die Gesamtzahl der Vorzeichenwechsel gerade sein, also $\tilde{e}_n(t) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_n(\varphi(t))$, da $1, ..., n-1$ genau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ungerade Zahlen enthält.
Nach den Frenet-Gleichungen folgt für $j \neq n-1$ (oder für orientierungserhaltend)

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_j(t) = \frac{1}{\|\dot{\tilde{c}}(t)\|}\left\langle \dot{\tilde{e}}_j(t), e_{j+1}(t)\right\rangle &= \frac{\left\langle (e_j \circ \varphi)^\bullet(t), (e_{j+1} \circ \varphi)(t)\right\rangle}{\|(c \circ \varphi)^\bullet(t)\|} \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \\ &= \frac{\left\langle \dot{e}_j(t)(\varphi(t)), e_{j+1}(\varphi(t))\right\rangle}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} \frac{(\dot{\varphi}(t))^2}{\|\dot{\varphi}(t))\|^2} = k_j(\varphi(t)).\end{aligned}$$

Falls φ orientierungsumkehrend, also $\dot{\varphi} < 0$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{n-1}(t) &= \frac{\left\langle (-1)^{n-1}\dot{e}_{n-1}(\varphi(t)), (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_n(\varphi(t))\right\rangle}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} \frac{\overbrace{\dot{\varphi}(t)}^{=-1}}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} \kappa_{n-1}(\varphi(t)) \\ &= (-1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \kappa_{n-1}(\varphi(t)),\end{aligned}$$

wegen $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor = 2n - \lceil \frac{n}{2} \rceil$. ■

urven-05 **Satz 1.5 (Invarianz unter Isometrie des $\mathbb{R}^n$)** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve mit Krümmungen κ_j und Frenet n-Bein $(e_1, ..., e_n)$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d.h. $B(x) = Ax + u$ mit $A \in \mathcal{O}(n)$ orthogonale Abbildung, $u \in \mathbb{R}^n$ Translation. Sei $\tilde{c} = B \circ c$ mit Krümmung $\tilde{\kappa}_j$ und Frenet n-Bein $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$. Dann gilt $\tilde{e}_i = Ae_i$ für $i = 1, ..., n-1$, $\tilde{\kappa}_i = \kappa_i$ für $i = 1, ..., n-2$, $\tilde{e}_n = (\det A)Ae_n$, $\tilde{\kappa}_{n-1} = \kappa_{n-1} \det A$.*

Bemerkung Es gilt $\det A \in \{1, -1\}$. Für $\det A = 1$ ist $A \in SO(n)$, d.h. B ist orientierungserhaltend.

Beweis. $(B \circ c)^\bullet(t) = A\dot{c}(t)$, $(B \circ c)^{(j)} = Ac^{(j)}$, woraus sofort folgt $\tilde{e}_j = Ae_i$ für $i = 1, ..., n-1$, also (da A orthogonal ist)

$$\tilde{\kappa}_i(t) = \frac{\langle A\dot{e}_i(t), Ae_{i+1}(t)\rangle}{\|A\dot{c}(t)\|} = \frac{\langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t)\rangle}{\|\dot{c}(t)\|} = \kappa_i(t).$$

Alles Weitere genauso, klar. ■

urven-06 **Feststellung 1.6** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $\lambda > 0$. Dann haben c und $\tilde{c} := \lambda c$ dieselben Frenet n-Beine und es gilt $\tilde{\kappa}_i = \frac{1}{\lambda}\kappa_i$.*

Beweis. $\tilde{e}_i = e_i$ Klar. Haben

$$\lambda \|\dot{c}\| \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\kappa}_1 & & \\ -\tilde{\kappa}_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \tilde{\kappa}_{n-1} \\ & & -\tilde{\kappa}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{e}_n^T \end{pmatrix}^\bullet = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} = \|\dot{c}\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & \\ -\kappa_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \kappa_{n-1} \\ & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix},$$

also $\tilde{\kappa}_i = \frac{1}{\lambda}\kappa_i$. ■

Kurven-07 **Satz 1.7 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie)** *Seien $\kappa_1, ..., \kappa_n : I \to \mathbb{R} \in C^\infty$, $\kappa_1, ..., \kappa_{n-2} > 0$ und $s_0 \in I$. Sei $e_1^0, ..., e_n^0$ eine positiv orientierte ONB des $\mathbb{R}^n$ und $q^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $c(s_0) = q^0$

(ii) Sei $e_1, ..., e_n$ das Frenet n-Bein von c, dann ist $e_1(s_0) = e_1^0, ..., e_n(s_0) = e_n^0$.

(iii) $\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}$ sind die Frenet-Krümmungen von c.

(iv) c ist nach Bogenlänge parametrisiert.

Beweis. Die lineare Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{E} = KE,\ K := \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & \\ -\kappa_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \kappa_{n-1} \\ & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(komponentenweise n^2 lineare Differentialgleichungen mit n^2 gesuchten Funktionen einer Variablen) hat genau eine Lösung E auf I mit

$$\begin{pmatrix} e_1(x_0)^T \\ \vdots \\ e_n(x_0)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{0^T} \\ \vdots \\ e_n^{0^T} \end{pmatrix}$$

Anfangswertproblem für (homogene) lineare Differentialgleichungssysteme. Die $e_1, ..., e_n$ sind dann C^∞. Definiere

$$c(s) := q^0 + \int_{s_0}^{s} e_1(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

dann ist $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Kurve mit $\dot{c}(s) = e_1(s)$ und $c(s_0) = q^0$. Da e_1 eindeutig bestimmt aus den Bedingungen, ist auch c eindeutig bestimmt mit dem Anfangswert $c(s_0) = q^0$, $\|\dot{c}(s)\| = \|e_1(s)\|$.

Zeigen als nächstes $e_1(s), ..., e_n(s)$ ist das Frenet n-Bein von c (an der Stelle s)
Es gilt

$$\begin{aligned} (EE^T)^\bullet &= \dot{E}E^T + E\dot{E}^T \\ &= KEE^T + E(KE)^T \\ &\overset{K^T = -K}{=} K(EE^T) - (EE^T)K. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem für $EE^T =: X$, nämlich

$$\dot{X} = KX - XK,$$

und wissen: $E(s_0)E^T(s_0) = I$ (Einheitsmatrix) nach Voraussetzung. Also *ist* $X(s) := I$ eine Lösung des AWP $\dot{X} = KX - XK$ und $X(s_0) = I$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des AWP folgt $X(s) = I = E(s)E^T(s)$, also ist die $E(s)$ eine orthogonal, also $e_1(s), ..., e_n(s)$ eine ONB.
Insbesondere ist $\|\dot{c}(s)\| = \|e_1(s)\| = 1$, d.h. c ist nach Bogenlänge parametrisiert und e_1 der 1-Vektor des Frenet n-Beins. Sei schon gezeigt, dass $e_1, ..., e_k$ die ersten k-Frenetvektoren von c

sind für $k \leqslant n-2$. Dann ist

$$c^{(k)} = \sum_{i \leqslant k} \left\langle c^{(k)}, e_i \right\rangle e_i, \text{ also}$$

$$c^{(k+1)} = \underbrace{\left\langle c^{(k)}, e_k \right\rangle}_{>0} \underbrace{\kappa_k}_{>0} e_{k+1} \text{ und Linearkombinationen der } e_1, \ldots, e_k,$$

wegen $\dot{e}_k = \kappa_k e_{k+1} - \kappa_{n-1} e_{k-1}$. Also ist e_{k+1} der $(k+1)$-te Frenetvektor von c. Das gilt auch für e_n, denn $e_1, \ldots, e_n$ ist eine ONB und $(e_1(s), \ldots, e_n(s))$ ist positiv orientiert, da $\det(e_1(s), \ldots, e_n(s)) = \det(e_1^0, \ldots, e_n^0) = 1$ nach Voraussetzung. Also ist $\det(e_1(t), \ldots, e_n(t)) = 1$, da in $\{-1, +1\}$, det stetig und I zusammenhängend. Nach Definition der Krümmungen von c ist klar (wegen $\dot{E} = KE$), dass die Frenet-Krümmung von c tatsächlich die gegebene Funktionen $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ sind. ■

Bemerkung Der Satz gilt auch, wenn man in der Voraussetzung statt $\kappa_i \in C^\infty$, $\kappa_i \in C^{m-i-1}$ voraussetzt mit $m \geqslant n$ und erhält in der Behauptung $c \in C^m$ (vgl Satz 1.3).

urven-08 **Feststellung 1.8** *(a) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine Frenet-Kurve. Dann gilt $\kappa := \kappa_1 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}$.*
(b) Sei $C : I \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve. Dann gilt $\kappa := \kappa_1 = \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3}$ und die Torsion $\tau := \kappa_2 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}$
Ferner gilt:

$$T = e_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}, B = e_3 = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}, N = e_2 = e_3 \times e_1 = B \times T.$$

Beispiel Die Schraubungen

$$S_t(x) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

bilden eine 1-Parametergruppe von (orthogonalen) Bewegungen, d.h. $S_{s-t} = S_s S_t$. Die Bahnkurve eines Punktes, der nicht auf der Achse liegt, heißt eine **Schraubenlinie**, z. B.

$$S_t \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}, \text{ mit } r > 0.$$

Kurve:

$$c(t) = \left(r \cos t, r \sin t, ht \right)$$

Wegen der Bewegungsinvarianz von κ_1, $\kappa_2 = \tau$ wissen wir (Satz 1.5) ohne Rechnung, dass κ und τ konstant sein müssen. Einsetzen in Proposition 1.8 ergibt (nachrechnen!)

$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + h^2} \quad \text{und} \quad \tau(t) = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

Zu gegebenen Zahlen $\kappa > 0$ und τ kann man r und h bestimmen

$$\kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{r^2 + h^2},$$

also

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{und} \quad h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Aus Satz 1.7 (Eindeutigkeit) und 1.4 und 1.5 Invarianz-Eigenschaften folgt

urven-09 **Corollar 1.9** *Die Raumkurven mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und τ sind genau die Schraubenlinien $t \mapsto \left(r \cos t, r \sin t, ht \right)$ mit $r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ und $h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ (bis auf Umparametrisierung, eigentliche*

Bewegung und Auswahl eines Definitionsintervalls). Dabei ist $\tau = 0$ (ebener) Kreis, als Spezialfall einer Schraubung, zugelassen.

Bemerkung Allgemeiner im $\mathbb{R}^{2m}$ gilt: Die Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^{2m}$ mit

$$c(t) = \left(r_1 \cos\alpha_1 t, r_1 \sin\alpha_1 t, ..., r_m \cos\alpha_m t, r_m \sin\alpha_m t\right)$$

hat konstante Krümmungen $\kappa_1, ..., \kappa_{2m-1}$ ($r_1, ..., r_m > 0$ beliebig, $\alpha_1, ..., \alpha_m > 0$ paarweise verschieden).

Beweis mit 1.5 $c(t)$ ist die Bahnkurve des Punktes $(r_1, 0, r, 0, ..., r_m, 0)^T$ unter der 1-Parametergruppe

$$B_s : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m} : B_s(x) := \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 s & -\sin\alpha_1 s & 0 & & \\ \sin\alpha_1 s & \cos\alpha_1 s & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\alpha_1 s & -\sin\alpha_1 s \\ & & & \sin\alpha_1 s & \cos\alpha_1 s \end{pmatrix} x$$

und es gilt

$$B_{s+t} = B_s \circ B_t,\ B_s(c(t)) = c(s+t).$$

■

Erinnerung an Analysis - Landau-Symbole

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ bedeutet $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$ bedeutet, es gibt eine Umgebung von x_0, in der $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ beschränkt ist.

Wichtige Bemerkungen und Definition (Taylorentwicklung) 1.10 Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= e_1, \\ \ddot{c} &= \dot{e}_1 = \kappa_1 e_2, \\ \dddot{c} &= (\kappa_1 e_2)^\bullet = \dot{\kappa}_1 e_2 + \kappa_1 \dot{e}_2 = \dot{\kappa}_1 e_2 + \kappa_1(\kappa_2 e_3 - \kappa_1 e_1) = (-\kappa_1^2) e_1 + \dot{\kappa}_1 e_2 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa e_3 \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von c an der Stelle s_0 liefert:

$$\begin{aligned} c(s) &= c(s_0) + \dot{c}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\ddot{c}(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\dddot{c}(s_0)(s - s_0)^3 + o\left((s - s_0)^3\right) \text{ für } s \to s_0 \\ &= c(s_0) + e_1(s_0)\left(s - s_0 - \frac{1}{6}\kappa_1^2(s_0)(s - s_0)^3\right) \\ &\quad + e_2(s_0)\left(\frac{1}{2}\kappa_1(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}_1(s_0)(s - s_0)^3\right) \\ &\quad + e_3(s_0)\left(\frac{1}{6}\kappa_1(s_0)\kappa_2(s_0)(s - s_0)^3\right) + o\left((s - s_0)^3\right) \text{ für } s \to s_0. \end{aligned}$$

Sei $s_0 = 0$ und $c(s_0) = 0$. In der 2. Approximation sieht c also aus wie die Parabel $\left(t, \frac{1}{2}\kappa_1(0)t^2\right)$ in der Schmiegebene (e_1, e_2)-Ebene.

Die Projektion von c auf die Schmiegebene (e_1, e_2)-Ebene «sieht also einer Umgebung von s_0 aus wie die Parabel» $\left(s, \frac{1}{2}\kappa_1 s^2\right)$.

Die Projektion auf die (e_1, e_3)-Ebene, die **rektifizierende Ebene**, ergibt

$$s \mapsto \left(s - \tfrac{1}{6}\kappa_1^2 s^3, \tfrac{1}{6}\kappa_1\kappa_2 s^3\right) + o\left(s^3\right).$$

Die Projektion auf die (e_2, e_3)-Ebene (also in Richtung e_1), die **Normalebene**, ergibt

$$s \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\kappa_1 s^2 + \tfrac{1}{6}\dot{\kappa}_1 s^3, \tfrac{1}{6}\kappa_1\kappa_2 s^3\right) + o\left(s^3\right),$$

die sogenannte **Neil'sche Parabel**.

Definition Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ eine Frenet-Kurve, $s_0 \in I$. Sei $\kappa := \kappa_1(s_0) \neq 0$. Dann heißt der Kreis $u : \left[-\frac{\pi}{\kappa}, \frac{\pi}{\kappa}\right] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$u(t) = \left(c(s_0) + \frac{1}{\kappa}e_2(s_0)\right) + \frac{1}{\kappa}\sin(\kappa t)e_1(s_0) + \frac{1}{\kappa}\cos(\kappa t)e_2(s_0),$$

der **Schmiegkreis** an c an der Stelle s_0. Er berührt die Kurve in s_0 (bzw. $t \neq 0$) von 2. Ordnung.

Evoluten und Evolventen

Definition Sei $c_1 : I \to \mathbb{R}^2$ eine Frenet-Kurve. c_2 heißt eine **Evolvente** (oder **Involute** von c_1, falls für alle $t \in I$ gilt:
$c_2(t)$ liegt auf der Tangente an c_1 durch $c_1(t)$, und die Tangenten an c_1 und c_2 in $c_1(t)$ bzw. $c_2(t)$ stehen senkrecht aufeinander.
c_1 heißt **Evulote** von c_2, falls c_2 eine Evolvente von c_1 ist.

urven-11 **Satz 1.11** *Sei $c_1 : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve. Dann gilt:*

a) Jede Evolvente c_2 von c_1 ist von der Form

$$c_2(t) = c_1(t) + (a - t)\dot{c}_1(t),$$

wo $a \in \mathbb{R}$ konstant.

b) Die durch a) definierte Kurve c_2 ist genau dann regulär, wenn $a \notin I$ und $\ddot{c}_1 \neq 0$ in I.

c) Die Evolute c_0 von c_1 ist eindeutig bestimmt und zwar ist $c_0(t)$ der Mittelpunkt des Schmiegkreises von c_1 in t. c_0 existiert und ist reguläre genau dann, wenn für die Krümmung κ von c_1 gilt: $\kappa(t), \dot{\kappa} \neq 0$ für alle $t \in I$.

Beweis. (a) $c_2(t)$ liegt auf der Tangente von $c_1(t)$, also ist für eine Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$

$$c_2(t) - c_1(t) = \lambda(t)\dot{c}(t),$$

also

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + \lambda\dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 &= \dot{c}_1 + \dot{\lambda}c_1 + \lambda\ddot{c}_1 = (1 + \dot{\lambda})\dot{c}_1 + \lambda\ddot{c}_1. \end{aligned}$$

Damit

$$0 = \langle \dot{c}_1, \dot{c}_2 \rangle = (1 + \dot{\lambda}) \underbrace{\|\dot{c}_1\|^2}_{=1} + \lambda \underbrace{\langle \cdot c_1, \ddot{c}_1 \rangle}_{\overset{\text{Vor.}}{=} 0},$$

also $\dot{\lambda} = -1 \Longrightarrow \lambda(t) = a - t$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $c_2(t) = c_1(t) + (a-t)\dot{c}_1(t)$, dann ist
$$\dot{c}_2(t) = (a-t)\ddot{c}_1(t) \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq t \wedge \ddot{c}_1(t) \neq 0$$

(c) Ansatz $c_0(t) = c_1(t) + \lambda(t)e_2(t)$ (da $c_0(t) - c_1(t) \perp \dot{c}_1(t)$, also ein Vielfaches von $e_2(t)$, wo e_2, κ bzgl. c_1). Dann:
$$\dot{c}_0 = \dot{c}_1 + \dot{\lambda}e_2 + \lambda\dot{e}_2$$
$$\dot{e}_2 = -\kappa e_1 = -\kappa\dot{c}_1, \qquad \text{da } \|\dot{c}_1\| \overset{\text{Vor.}}{=} 1,$$
also
$$\dot{c}_0 = (1-\lambda\kappa)\dot{c}_1 + \dot{\lambda}e_1.$$
Wegen $0 = \langle \dot{c}_0, \dot{c}_1 \rangle = (1-\lambda\kappa)$ folgt $\lambda = 1/\kappa$, also ist (notwendigerweise)
$$c_0 = c_1 + \frac{1}{\kappa}e_2.$$
Es ist definiert, falls $\kappa \neq 0$. $c_0(t)$ ist also der Mittelpunkt des Krümmungskreises von c_1 an der Stelle t. Außerdem
$$\dot{c}_0 = \dot{\lambda}e_2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\bullet} e_2 = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}e_2,$$
also $\dot{c}_0(t) = \dot{\kappa}(t) \neq 0$.

■

Sei c_2 Evolvente von c_1. Dann
$$\|c_2(t) - c_1(t)\| \overset{\text{(a)}}{=} \|(a-t)\dot{c}_1(t)\| = |a-t|,$$
also wächst oder schrumpft der Abstand von $c_2(t)$ zu $c_1(t)$ genauso wie die Länge $c_1(t)$. Man nennt dann c_2 auch **Fadenevolvente**.

2 Globale Kurventheorie

Definition Eine (parametrisierte) C^k**-geschlossene Kurve** $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist eine C^k-Kurve, für die $c(a) = c(b)$ gilt und $c^{(j)}(a) = c^{(j)}(b)$ für $j = 1, \ldots, k$. Sie heißt **einfach geschlossen**, wenn $c\big|_{[a,b)}$ injektiv ist.

Bemerkung Eine C^k-geschlossene Kurve lässt sich also zu einer $(b-a)$-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n \in C^2$ regulär. Dann heißt $e_1 : [a,b] \to S^{n-1}$ mit $e_1 := \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$ auch das **Tangentenbild**, wobei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Wir erweitern die Definition von $\kappa_1(t)$ für beliebige reguläre C^2-Kurven durch $\|\dot{e}_1(t)\| = |\kappa_1(t)|\,\|\dot{c}(t)\|$ und $\kappa_1 \geqslant 0$ falls $n \geqslant 3$.

Für $n = 2$ erhält man κ_1 aus $\dot{e}_1 = \kappa_1 \|\dot{c}\| e_2$. Falls $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ linear unabhängig sind, ist $\kappa_1(t) = 0$. Damit ist
$$\int_a^b |\kappa_1(t)|\,\|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot{e}_1(t)\|\,\mathrm{d}t,$$
die Länge des Tangentenbildes auf der Sphäre S^{n-1}. Diese Zahl heißt **totale Absolutkrüm-**

mung von $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Sie ist invariant unter Umparametrisierungen und Bewegungen.

Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \in C^2$ eine reguläre *ebene* Kurve. Betrachte für $s \in [a,b]$

$$\varphi(s) := \int_a^s \kappa_1(t)\,\|\dot{c}\|\,\mathrm{d}t,$$

also $\dot{\varphi}(s) = \kappa_1(s)\,\|\dot{c}(s)\| = \langle \dot{e}_1(s), e_2(s)\rangle$. Wegen $\varphi(a) = 0$ beschreibt $\varphi(s)$ außerdem den (orientierten) Gesamtwinkel zwischen $e_1(a)$ und $e_1(s)$ (im Bogenmaß gemessen) auch unter Berücksichtigung von Vielfachen von 2π. φ ist eine C^{k-1}-Funktion, wenn $c \in C^k$ ($k \geqslant 2$).

Definition Für reguläre ebene C^2-Kurven $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa_1(t)\,\|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t$$

die **Umlaufzahl** des Tangentenbildes, der **Rotationsindex** oder **Tangentenumlaufzahl** von c.

urven-01 **Feststellung 2.1** *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ reguläre C^2-geschlossene ebene Kurve. Sei $e^0 \in S^1$, so dass $e_1(t) = e^0$ nur für endlich viele $t \in (a,b)$, sagen wir $t_1 < t_2 ... < t_m$, und sei $\kappa(t_i) \neq 0$ für $i = 1,...,m$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(t)\,\|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t = \sum_{i \leqslant m} \operatorname{sgn}\kappa(t_i),$$

wobei

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

urven-02 **Lemma 2.2** *(a) Sei $f : [a,b] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass $f(t) = \big(\cos\vartheta, \sin\vartheta\big)$. Je zwei solche Funktionen unterscheiden sich nur um ein konstantes Vielfaches von 2π.*

(b) Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig bzgl. x_0, d.h. für alle $x \in T$ liegt die Strecke x_0x in T). Sei $f : T \to S^1$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : T \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \big(\cos\vartheta(x), \sin\vartheta(x)\big)$. Je zwei solche Funktionen unterscheiden sich nur um ein konstantes ganzzahliges Vielfaches von 2π.

urven-03 **Satz 2.3 (Umlaufsatz von Hopf)** *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre einfach C^2-geschlossene Kurve. Dann ist der Rotationsindex von c $+1$ oder -1, d.h.*

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_a^b \kappa(t)\,\|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t\right| = 1$$

Beweis. Wegen der Invarianzeigenschaften (Sätze 1.4, 1.5) und da c $(b-a)$-periodisch C^2-fortsetzbar ist, können wir oBdA annehmen, dass $c(a) = c(b) = 0$ und $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ mit $y \geqslant 0$ für alle t. Damit ist $e_1(a) = (1,0)$ oder $(-1,0)$.
Setze oBdA voraus, dass $e_1(a) = (1,0)$ (sonst spiegele an der y-Achse, dabei kehrt sich das Vorzeichen von κ um, was die Behauptung nicht beeinflusst).

Definiere $T := \{(s,t) \mid a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\}$, $F : T \to S^1$ durch

$$F(s,t) := \begin{cases} \dfrac{c(t)-c(s)}{\|c(t)-c(s)\|} & \text{für } (s,t) \in T,\ s \neq t \\ \dfrac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} & \text{für } s = t \\ -\dfrac{\dot{c}(a)}{\|\dot{c}(a)\|} = (-1,0) & \text{für } (s,t) = (a,b) \end{cases},$$

F ist wohldefiniert, da $c\big|_{[a,b)}$ injektiv nach Voraussetzung. F ist stetig: Klar, für $(s,t) \neq (a,b)$, $s \neq t$ an diesen Stellen aber auch leicht zu sehen.

T ist sternförmig (sogar konvex). Also können wir Lemma 2.2 anwenden: Sei $\vartheta : T \to \mathbb{R}$ die nach Lemma 2.2 eindeutig existierende Funktion mit $F(x) = \Big(\cos\vartheta(x), \sin\vartheta(x)\Big)$ und $\vartheta(a,a) = 0$. Dann ist

$$\vartheta(x,t) = \varphi(t) = \int_0^t \kappa(s)\,\|\dot{c}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Die Funktion

$$F(a,t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}$$

liegt wegen $y(t) > 0$ im oberen Halbkreis für $a \leqslant t \leqslant b$. Wegen $\vartheta(a,a) = 0$ ist $0 \leqslant \vartheta(a,t) \leqslant \pi$, also $\vartheta(a,b) = \pi$. Betrachte $\vartheta(s,b)$ mit

$$F(s,b) = -\frac{c(s)}{\|c(s)\|},$$

liegt im unteren Halbkreis, da $c([a,b])$ in der oberen Halbebene liegt.
Wegen $\vartheta(a,b) = \pi$ ist also $\pi \leqslant \vartheta(s,b) \leqslant 2\pi$, also $\vartheta(b,b) = 2\pi$, also

$$\int_a^b \kappa(s)\,\|\dot{c}\|\,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

■

Weitere wichtige Sätze

Satz (Jordanscher Kurvensatz) *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ einfach C^2-geschlossen. Dann besitzt $\mathbb{R}^2 \setminus c([a,b])$ genau zwei Zusammenhangskomponenten eine beschränkte und eine unbeschränkte, die jeweils $c([a,b])$ als Rand haben.*

Satz von Schoenfliess *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ einfach C^0-geschlossen. Dann gibt es einen Homomöorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(S^1) = c([a,b])$. φ bildet also die Kreisscheibe auf die von $c([a,b])$ berandete beschränkte Gebiet ab.*

Definition Ein **Scheitel** einer ebenen regulären C^3-Kurve ist ein Punkt mit $\dot{\kappa}(t) = 0$.

GKurven-04 **Satz 2.4 (Vierscheitelsatz von Mukhopadyaya (1909))** *Eine ebene reguläre einfache geschlossene C^3-Kurve hat wenigstens mindestens vier Scheitel.*

Beispiel (i) Beim Kreis ist jeder Punkt ein Scheitel
(ii) Die Ellipse hat genau vier Scheitel.

Satz (isopermetrische Ungleichung) *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ einfach geschlossen. Bezeichne A den Flächeninhalt, der von c eingeschlossenen Fläche. Dann gilt: $L(c)^2 \geqslant 4\pi A$ und «=» gilt $\iff$ c ist Kreis.*

Beweisidee. 1) Bilde die konvexen Hülle (falls vorher nicht konvex, wird A vergrößert und L verkleinert)

2) Steiner-Symmetrisierung einer Geraden g: Flächeninhalt bleibt, die Länge wird verkleinert, falls die Kurve vorher nicht symmetrisch zu einer Geraden parallel zu g war.

3) Eine Kurve, bei der zu jeder Richtung eine Symmetrieachse in dieser Richtung existiert, ist ein Kreis.

4) Maximum $\frac{A}{L^2}$ wird angenommen.

■

II Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$, lokale Flächentheorie

3 Flächenstücke und 1. Fundamentalform

Definition $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt ein parametrisiertes n-dimensionales reguläres C^r-Flächenstück ($r \geqslant 1$) oder kurz eine **C^r-n-Fläche**, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^r$ und regulär (insbesondere ist dann $m \geqslant n$). Eine n-Fläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ ($m \geqslant n+1$) nennt man eine **Hyperfläche**.

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine n-Fläche. Eine **Parametertransformation** ist ein Diffeomorphismus $\varphi : V \to U$ (wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen). φ heißt **orientierungstreu (oder -erhaltend)**, falls $\det \mathrm{D}\varphi_v > 0$ für alle $v \in V$ und **orientierungsumkehrend**, falls < 0.
$\tilde{f} = f \circ \varphi$ heißt dann die durch φ aus f hervorgegangene n-Fläche.

Definition und Bemerkung Wenn $f, \varphi \in C^r$, dann ist $\tilde{f} = f \circ \varphi \in C^r$. $\tilde{f}$ heißt **C^r-äquivalent** zu f, wenn $\tilde{f}$ aus f durch eine orientierungserhaltende C^r-Parametertransformation hervorgeht. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^r-n-Flächen.

$\mathrm{D}f_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dann ist $T_u f := \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$ ein linearer n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^m$ (f n-Fläche). Betrachte $\mathrm{D}f\big|_u : \mathbb{R}^n \to T_u f$ (Einschränkung im Bild). Dann heißt $T_u f$ auch der **Tangentialraum von f an der Stelle u**. Seine Elemente heißen **Tangentialvektoren**. $T_u f^\perp$ orthogonale Komplement ($(m-n)$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^m$) heißt der **Normalenraum** von f an der Stelle u. Seine Elemente heißen **Normalenvektoren** von f an der Stelle u.

Definition Die **natürliche Basis** von $T_u f$ ist $\left(\mathrm{D}f\big|_u(e_1), \ldots, \mathrm{D}f\big|_u(e_n)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_u, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_u\right)$.

Definition (1. Fundamentalform) Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine n-Fläche. Die **erste Fundamentalform** von f auf $T_u f$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^m$ eingeschränkt auf $T_u f$

$$\mathrm{I}_u(X, Y) := \langle X, Y \rangle \text{ für alle } X, Y \in T_u f.$$

Die **erste Fundamentalform von f auf $\mathbb{R}^n$** ist

$$g_u(x, y) := \left\langle \mathrm{D}f\big|_u(x), \mathrm{D}f\big|_u(y) \right\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.

Andere Notationen I, $\mathrm{D}f \cdot \mathrm{D}f$ oder $\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}f$.

Bei Parametertransformationen φ stimmt die 1. Fundamentalform von f auf $T_{\varphi(v)} f$ mit derjenigen von $\tilde{f} = f \circ \varphi$ auf $T_v \tilde{f}$ überein, wo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Fund-01 **Satz 3.1 (Invarianz der 1. Fundamentalform (bzw. Transformationsverhalten unter Bewegungen und Parametertransformation))** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine n-Fläche.*

a) Sei $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Bewegung. Dann ist auch $\tilde{f} = B \circ f$ eine n-Fläche und für $\tilde{g}_u$ 1. Fundamentalform von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt: $\tilde{g}_u = g_u$.

b) Sei $\varphi : V \to U$ eine Parametertransformation und $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann gilt für $\tilde{g}_u$ 1. Fundamentalform von $\tilde{f}$ (auf $\mathbb{R}^n$):

$$\tilde{g}_u(x,y) = g_{\varphi(v)}\left(\mathrm{D}\varphi\big|_v(x), \mathrm{D}\varphi\big|_v(y)\right),$$

für alle $v \in V$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. a) Sei $A(x) := B(x) - B(0)$, A orthogonale Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_u(x,y) &= \langle \mathrm{D}(B \circ f)_u(x)), \mathrm{D}(B \circ f)_u(y))\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{D}B_{f(u)}(\mathrm{D}f_u(x)), \mathrm{D}B_{f(u)}(\mathrm{D}f_u(y))\right\rangle \\ &= \langle A\mathrm{D}f_u(x), A\mathrm{D}f_u(y)\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}f_u(x), \mathrm{D}f_u(y)\rangle = g_u(x,y),\end{aligned}$$

also $\tilde{g}_u = g_u$.

b)

$$\begin{aligned}\tilde{g}_u(x,y) &= \langle \mathrm{D}(f \circ \varphi)_u(x), \mathrm{D}(f \circ \varphi)_u(y)\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{D}f_{\varphi(v)}(\mathrm{D}\varphi_v(x), \mathrm{D}f_{\varphi(v)}(\mathrm{D}\varphi_v(y))\right\rangle \\ &= g_{\varphi(v)}\left(\mathrm{D}\varphi_v(x), \mathrm{D}\varphi_v(y)\right)\end{aligned}$$

■

Die Strukturmatrix von g_u ist

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(u) &:= (g_{ij}(u)_{i,j} \text{ mit } g_{ij}(u) := g_u(e_i, e_j) \\ &= \left\langle Df\big|_u(e_i), Df\big|_u(e_j)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_u, \frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_u \right\rangle,\end{aligned}$$

also $g_u(x,y) = x^T\mathcal{G}(u)y$, $\mathcal{G}(u) = (\mathrm{D}f_u)^T\mathrm{D}f_u$.

Die Matrix $(g_{ij})_{i,j}$ ist also sowohl die Strukturmatrix von g_u bzgl. der Standardbasis auf $\mathbb{R}^n$ als auch die Strukturmatrix von I_n bzgl. der natürlichen Basis $\mathrm{D}f\big|_u(e_i)$, $i = 1, ..., n$ auf $T_u f$.

Bemerkung Falls $f \in C^r$, dann ist $g \in C^{r-1}$ in dem Sinne, dass $g_{ij} \in C^{r-1}$.

Bemerkung Satz 3.1 b) in Matrixform (bzgl. der natürlichen Basis) für $\tilde{f} = f \circ \varphi$

$$x^T\left(\tilde{g}_{ij}(v)\right)_{i,j}(y) = \tilde{g}_u(x,y) = g_{\varphi(v)}(\mathrm{D}\varphi_v(x), \mathrm{D}\varphi_v(y)) = x^T \underbrace{(\mathrm{D}\varphi_v^T)(g_{ij}(\varphi(v))\mathrm{D}\varphi_v(y)}_{(\tilde{g}_{ij})_{i,j}} y$$

$$\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{G}}(v) = \mathrm{D}\varphi_v^T\mathcal{G}(\varphi(v))\mathrm{D}\varphi_v$$

Anwendung der 1. Fundamentalform zu Bestimmung von Länge, Winkeln und Inhalten

Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^r n-Fläche mit 1. Fundamentalform g_u. Sei $u : I \to U$ eine reguläre C^r-Kurve, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^m$ eine reguläre C^r-Kurve

$$\dot{c}(t_0) = \frac{\mathrm{d}(f \circ u)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0} = \mathrm{Df}_{u(t_0)}(\dot{u}(t_0)) \neq 0 \quad \forall t_0 \in I$$

und damit

$$\begin{aligned}\|\dot{c}(t_0)\|^2 &= \langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{Df}_{u(t_0)}(\dot{u}(t_0)), \mathrm{Df}_{u(t_0)}(\dot{u}(t_0))\right\rangle \\ &= g_{u(t_0)}(\dot{u}(t_0), \dot{u}(t_0)).\end{aligned}$$

Die Länge von c im Bereich $[a,b] \subset I$ ist also

$$\int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g_{u(t_0)}(\dot{u}(t), \dot{u}(t_0))}\,\mathrm{d}t.$$

Für $u_1, u_2 : I \to U$ mit $u_1(t_1) = u_2(t_2)$ reguläre Kurven ist der Schnittwinkel zwischen den Bildkurven $c_1 := f \circ u_1$, $c_2 := f \circ u_2$ auf der Fläche

$$\begin{aligned}\sphericalangle(c_1, c_2) &= \arccos \frac{\langle \dot{c}_1(t_1), \dot{c}_2(t_2)\rangle}{\|\dot{c}_1(t_1)\|\,\|\dot{c}_2(t_2)\|} \\ &= \arccos \frac{g_{u_1(t_1)}(\dot{u}_1(t_1), \dot{u}_2(t_2))}{\sqrt{g_{u_1(t_1)}(\dot{u}_1(t_1), \dot{u}_1(t_1)) g_{u_2(t_2)}(\dot{u}_2(t_2), \dot{u}_2(t_2))}}\end{aligned}$$

Zum Flächeninhalt Sei $V \subset U$ offen. Es soll der Flächeninhalt von $f(V)$ (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten bei bei Selbstüberschneidung) definiert werden. Die lokale Flächenverzerrung wird durch Inhalt des Bildparallellogramms des Einheitswürfels:
BÜLD

Problem Df_u ist injektiv, aber nicht bijektiv ($m \geqslant n$!). Ergänze durch eine ONB von $T_u f^\perp$, sagen wir $N_1(t), ..., N_{m-n}(u)$. Also

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{Df}(e_1), ..., \mathrm{Df}_u(e_n), N_1(u), ..., N_{m-n}(u)\right)^T \left(\mathrm{Df}(e_1), ..., \mathrm{Df}_u(e_n), N_1(u), ..., N_{m-n}(u)\right) \\ &= \begin{pmatrix} (g_{ij}(u))_{i,j} & 0 \\ 0 & E_{m\times n}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

also ist

$$\left|\det\left(\mathrm{Df}(e_1), ..., \mathrm{Df}_u(e_n), N_1(u), ..., N_{m-n}(u)\right)\right| = \sqrt{\det(g_{ij}(u))_{i,j}} = \sqrt{\det \mathcal{G}(u)}.$$

Es ist somit sinnvoll den Inhalt von $f(V)$ als

$$\mu(f(V)) = \int_V \sqrt{\det \mathcal{G}(u)}\,\mathrm{d}u$$

zu definieren. Wenn $f(V)$ als *Menge* betrachtet wird, muss man voraussetzen, dass $f\big|_V$ (bis auf Nullmengen) injektiv ist.

Definition Falls $(g_{ij})_{i,j} = E$, dann bleiben unter f Längen, Winkel und Inhalten erhalten. f heißt dann eine **Isometrie**.
Falls $(g_{ij}(u))_{i,j} = \lambda(u)E$, ist f winkeltreu und heißt dann eine **konforme Abbildung**.

Beispiel Die Inverse der stereographischen Projektion: $\mathbb{R}^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wo $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitsspähre, ist eine konforme Abbildung.

4 Die zweite Fundamentalform von Hyperflächen und Krümmungen

Definition Eine **Hyperfläche** $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-Fläche ($m = n+1$).

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Dann bezeichne $N : U \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die durch folgende Bedingungen eindeutig definierte Abbildung

(i) $\|N(u)\| = 1$, d.h. $N(u) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) $\langle N(u), \mathrm{D}f_u(e_i)\rangle = 0$ für $i = 1, ..., n$, d.h. $N(u) \in (\mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n))^\perp$

(iii) $\Big(\mathrm{D}f_u(e_1), ..., \mathrm{D}f_u(e_n), N(u)\Big)$ ist positiv orientiert, d.h. $\det\Big(\mathrm{D}f_u(e_1), ..., \mathrm{D}f_u(e_n), N(u)\Big) > 0$.

N heißt auch die **Gauß'sche Normalenabbildung von** f oder **Gauß-Abbildung**.

Es ist klar, dass N durch die Bedingungen eindeutig bestimmt ist und existiert (wegen $\mathrm{D}f_u$ injektiv). Ferner ist klar, dass aus $f \in C^r$ folgt $N \in C^{r-1}$. Falls $n = 2$, dann gilt

$$N(u) = \frac{\mathrm{D}f_u(e_1) \times \mathrm{D}f_u(e_2)}{\|\mathrm{D}f_u(e_1) \times \mathrm{D}f_u(e_2)\|}$$

Im Weiteren wird $N \in C^1$ gebraucht, deshalb

Generalvoraussetzungen

$f \in C^2$, $n \geqslant 2$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, wo $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. N sei die Gauß'sche Normalenabbildung, $\mathcal{G}(u)$ die Matrix der 1. Fundamentalform (für $u \in U$).

Definition und Lemma Aus $\langle N(u), N(u)\rangle = 1$ für alle $u \in U$ folgt für $i = 1, ..., n$:

$$0 = \frac{\partial \langle N, N\rangle}{\partial u_i} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N\right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_i}\right\rangle,$$

also

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N\right\rangle = 0,$$

damit liegt $\mathrm{DN}_u(\mathbb{R}^n) \subset T_u f$ und wir haben $\mathrm{DN}\big|_U : \mathbb{R}^n \to T_u f$.

Definition (Weingartenabbildung, zweite und dritte Fundamentalform) (i) Die lineare Abbildung $L_u := -\mathrm{DN}\big|_u \circ \mathrm{D}f\big|_u^{-1} : T_u f \to T_u f$ heißt die **Weingarten-Abbildung (shape operator)** von f (auf $T_u f$).

(ii) Die **zweite Fundamentalform** II von f (auf $T_u f$) ist definiert durch

$$\mathrm{II}_u(X, Y) := \mathrm{I}_u(L_u X, Y) \text{ für } X, Y \in T_u f.$$

(iii) Die **dritte Fundamentalform** III von f (auf $T_u f$) ist definiert durch

$$\mathrm{III}_u(X, Y) := \mathrm{I}_u(L_u X, L_u Y) \text{ für } X, Y \in T_u f.$$

Fund2-01 **Satz 4.1** *L_u ist selbstadjungiert bzgl. I_u, d.h.*

$$\mathrm{I}_u(L_u X, Y) = \mathrm{I}_u(X, L_u Y) \quad \forall X, Y \in T_u f.$$

II_u *und* III_u *sind eine symmetrische Bilinearform auf $T_u f$ und*

$$\mathrm{III}_u(X, Y) = \mathrm{I}_u(L_u^2 X, Y) = \mathrm{I}_u(X, L_u^2 Y) \quad \forall X, Y \in T_u f.$$

Beweis. Betrachte jeweils an der Stelle u:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \underbrace{\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle}_{=0} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle,$$

also folgt

$$\mathrm{I}\left(L\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) \overset{\text{def. } L}{=} \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle \overset{\text{oben}}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \overset{f \in C^1}{=} \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u_j}, \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\rangle = \mathrm{I}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, L\frac{\partial f}{\partial u_j}\right)$$

Hieraus folgt, dass L selbstadjungiert bzgl. I ist, da die $\frac{\partial f}{\partial u_i}\Big|_u$ eine Basis von $T_u f$ sind.
Also $\mathrm{II}(X,Y) = \mathrm{I}(LX,Y) = \mathrm{I}(X,LY) = \mathrm{II}(Y,X)$,
III symmetrisch klar,

$$\mathrm{III}(X,Y) = \mathrm{I}(LX,LY) = \mathrm{I}(L^2X,Y) = \mathrm{I}(X,L^2Y)$$

wegen L selbstadjungiert bzgl. I. ■

Matrixdarstellung der Fundamentalform und von L bzgl. der **natürlichen Basis** $(\mathrm{D}f|_u(e_i))$ von $T_u f$

$$\mathrm{I}(\mathrm{D}f|_u(e_i), \mathrm{D}f|_u(e_j)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}\Big|_u, \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_u \right\rangle = g_{ij}(u)$$

$$\mathrm{II}(\mathrm{D}f|_u(e_i), \mathrm{D}f|_u(e_j)) = \mathrm{I}(-\mathrm{DN}|_u(e_i), \mathrm{D}f|_u(e_j)) = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}\Big|_u, \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_u \right\rangle = \left\langle N(u), \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\Big|_u \right\rangle =: h_{ij}(u) \; (= h_{ji}(u))$$

Bezeichne

$$\mathcal{G}(u) := (g_{ij}(u))_{i,j}$$
$$\mathcal{H}(u) := (h_{ij}(u))_{i,j}$$

Wir haben dann bzgl. der natürlichen Basis $(\mathrm{D}f|_u(e_i))$ von $T_u f$, wobei $L(u)$ die Matrix von L_u bzgl. dieser Basis bezeichnet

$$x^T \mathcal{H}(u) y = x^T \mathcal{G}(u)(L(u)y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

also $\mathcal{H}(u) = \mathcal{G}(u)L(u)$, also: $\boxed{L(u) = \mathcal{G}^{-1}(u)\mathcal{H}(u)}$
Bezeichne:

$$(h^i_j(u))_{i,j} := L(u) \quad \text{und} \quad (g^{ij}(u))_{i,j} := \mathcal{G}^{-1}(u).$$

Dann gilt komponentenweise:

$$h^i_j(u) = \sum_{k=1}^n g^{ik}(u) h_{kj}(u),$$

sowie

$$L_u(\mathrm{D}f|_u(e_j)) = \sum_{i=1}^n h^i_j(u) \mathrm{D}f|_u(e_i).$$

Bemerkung 1) Falls $f \in C^r$, dann sind die $h_{ij} \in C^{r-2}$, $h^i_j \in C^{r-2}$.
2) $h_{ij} = h_{ji}$ (da II symmetrische Bilinearform ist). Aber $(h^i_j(u))_{i,j}$ ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, obwohl L_u bzgl. I_u selbstadjungiert ist (denn: Die Basis $\mathrm{D}f|_u(e_i)$ ist im Allgemeinen *keine* ONB von $T_u f$ bzgl. I).

Fund2-02 **Satz 4.2 (Invarianzeigenschaften unter Parametertransforamtion mit Bewegungen)** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, U offen, eine Hyperfläche.*

a1) Sei $\varphi : V \to U$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation und $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann gilt für $\tilde{N}$, $\tilde{L}$, $\tilde{\mathrm{II}}$ und $\tilde{f}$ für alle $v \in V$, wo $\tilde{N} = N \circ \varphi$, $\tilde{L}_u = L_{\varphi(v)}$, $\tilde{\mathrm{II}}_u = \mathrm{II}_{\varphi(v)}$

a2) Falls φ orientierungsumkehrend ist, dann $\tilde{N} = -N \circ \varphi$, $\tilde{L}_u = -L_{\varphi(v)}$, $\tilde{\mathrm{II}}_u = -\mathrm{II}_{\varphi(v)}$

b1) Sei $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine eigentliche Bewegung, d.h. $B(x) = Ax + b$ mit $A \in SO(n+1)$. Sei $\tilde{f} = B \circ f$, Dann gilt für $\tilde{N}$, $\tilde{L}$, $\tilde{\mathrm{I}}$, $\tilde{\mathrm{II}}$ von $\tilde{f}$, $X, Y \in T_u f$: $\tilde{N} = A \circ N$, $\tilde{L} = A \circ L \circ A^{-1}$, $\tilde{\mathrm{I}}(AX, AY) = \mathrm{I}(X, Y)$, $\tilde{\mathrm{II}}(AX, AY) = \mathrm{II}(X, Y)$

b2) Falls $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $B(x) = Ax + b$ eine uneigentliche Bewegung, d.h. $A \in O(n+1)$. Dann ist $\tilde{N} = -A \circ N$, $\tilde{L} = -A \circ L \circ A^{-1}$, $\tilde{\mathrm{I}}(AX, AY) = \mathrm{I}(X, Y)$, $\tilde{\mathrm{II}}(AX, AY) = -\mathrm{II}(X, Y)$

Beweis. a1) $\tilde{N} = N \circ \varphi$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\left\langle N(\varphi(v)), \mathrm{D}\tilde{f}\big|_{\varphi(v)}(x) \right\rangle = \left\langle N(\varphi(v)), \mathrm{D}f\big|_{\varphi(u)}(\mathrm{D}\varphi_v(x)) \right\rangle = 0$$

und gilt $\|N \circ \varphi(v)\| = 1$ klar, $\mathrm{D}\tilde{f}_u(e_i) = \mathrm{D}f_{\varphi(v)}(D\varphi_u(e_i)))$. Die lineare Abbildung D'_u ist orientierungserhaltend (φ oe.), also ist $(\mathrm{D}\tilde{f}_v(e_1), ..., \mathrm{D}\tilde{f}_v(e_n), N(\varphi(v)))$ positiv orientiert, also $\tilde{N} = N \circ \varphi$. Also

$$\tilde{L}_v = -\mathrm{D}\tilde{N}_v \circ \mathrm{D}\tilde{f}\big|_u^{-1} = -\mathrm{DN}\big|_{\varphi(v)} \circ \mathrm{D}'_v \circ (\mathrm{D}f\big|_{\varphi(u)} \circ \mathrm{D}'_v)^{-1} = -\mathrm{DN}\big|_{\varphi(v)} \circ \mathrm{D}f\big|_{\varphi(v)}^{-1} = L_{\varphi(v)}$$

$$\tilde{\mathrm{II}}_v(X, Y) = \tilde{I}_v(\tilde{L}_v X, Y) = I_{\varphi(v)}(L_{\varphi(v)} X, Y) = \mathrm{II}_{\varphi(v)}(X, Y)$$

a2) Sei φ orientierungserhaltend. Damm folgt genauso wie in a1) $\tilde{N} = -N \circ \varphi$. Hieraus folgt der Rest.

b1) $\tilde{\mathrm{I}}(AX, AY) = \mathrm{I}(X, Y)$ klar, da $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ wegen $A \in SO(n+1)$, $\tilde{N} = N \circ A$ klar. Daraus folgt:

$$\tilde{L}_u = -\mathrm{D}\tilde{N}_u \circ \mathrm{D}\tilde{f}\big|_u^{-1} = -A\mathrm{DN}_u \circ (A \circ \mathrm{D}f\big|_u)^{-1} = AL_u A^{-1}$$

$$\tilde{\mathrm{II}}(AX, AY) = \tilde{\mathrm{I}}(\tilde{L}(AX), AY) = \tilde{\mathrm{I}}(ALX, AY) = \mathrm{I}(LX, Y) = \mathrm{II}(X, Y).$$

b2) Gilt $\det A = -1$. Dann $\tilde{N} = -A \circ N$ klar. Die übrigen Behauptungen folgen dann wie in b1).

■

Kurven auf Flächen

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^r-n-Fläche. Eine C^r**-Kurve auf** f ist eine reguläre C^r-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^m$, die sich in der Form $c = f \circ u$ schreiben lässt, wobei $u : I \to U$ eine reguläre C^r-Kurve ist.

Bemerkung Falls f injektiv und die Umkehrabbildung $f\big|^{-1} : f(U) \to U$ stetig ist, d.h. $f\big|^{f(U)}$ ein Homoömorphismus, dann ist c eine Kurve auf f gdw. $c([a, b]) \subset f[U]$. Ferner ist dann

$$u(t) = f\big|^{-1}(c(t)) \quad \forall t \in I.$$

Voraussetzung f injektiv reicht nicht aus BÜLD

Sei $c = f \circ u$ eine Kurve auf der Hyperfläche f und c eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre C^2-Kurve. Dann ist $\dot{c} = e_1$, $\ddot{c} = \dot{e}_1 = \kappa e_2$ (Beachte Konvention: $\dot{c}$, $\ddot{c}$ linear unabhängig, dann κ und e_2 definiert, sonst ist $\ddot{c} = 0$, denn nach Bogenlänge parametrisiert, $\kappa = 0$ definiert, e_2 undefiniert).

Wir zerlegen $\ddot{c}$ in einen Tangential- und einen Normalanteil (bzgl. f):

$$\dot{e}_1 = \kappa e_2 = \underbrace{(\kappa e_2)^{\text{Tang}}}_{\text{Tangentialanteil}} + \underbrace{\langle \kappa e_2, N\rangle N}_{\text{Normalanteil}}$$

Wir bestimmen den Normalanteil.

Fund2-03 **Satz 4.3** *Sei $c = f \circ u$ eine reguläre C^2-Kurve auf der Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geqslant 2$). Sei $\|\dot{c}(t)\| = 1$ und $\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$ linear unabhängig. Dann gilt für die Krümmung $\kappa(t)$ und Hauptnormalenvektor e_2 von c:*

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{u(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) &= \langle \ddot{c}(t), N(u(t))\rangle = \kappa(t)\,\langle e_2(t), N(u(t))\rangle \\ &= \kappa \cos \sphericalangle (e_2(t), N(u(t))).\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt $\dot{c}(t) = (f \circ u)^\bullet(t) = \mathrm{D}f_{u(t)}(\dot{u}(t))$, also

$$L_{u(t)}(\dot{c}(t)) = -\mathrm{DN}_{u(t)}(\dot{u}(t)) = -(N \circ u)^\bullet(t),$$

also gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{u(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) &= -\langle (N \circ u)^\bullet(t), \dot{c}(t)\rangle \\ &\overset{1}{=} \langle N(u(t)), \ddot{c}(t)\rangle \\ &\overset{2}{=} \kappa(t)\,\langle N(u(t)), e_2(t)\rangle \\ &= \kappa(t) \cos \sphericalangle (N(u(t)), e_2(t)).\end{aligned}$$

^{1} gilt, da aus $\langle N(u(t)), \dot{c}(t)\rangle = 0$ für alle $t \in I$ folgt

$$\langle (N \circ u)^\bullet, \dot{c}(t)\rangle + \langle (N \circ u)(t)), \ddot{c}(t)\rangle = 0$$

und ^{2} gilt, da $\|\dot{c}(t)\| = 1$ und

$$\ddot{c}(t) = \dot{e}_1(t) = \kappa(t) e_2(t).$$

■

Bemerkung Falls c nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt also

$$\mathrm{II}_{u(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \|\dot{c}(t)\|^2 \kappa(t)\,\langle e_2(t), N(u(t))\rangle\,.$$

Falls $\ddot{c} = 0$, dann ist $\mathrm{II}_{u(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0$ und $\kappa(t) = 0$, also $e_2(t)$ nicht definiert.

Folgerung (Satz von Meusmier) Für je zwei Kurven c, $\tilde{c}$ auf der Hyperfläche, die für $t = t_0$ durch den selben Punkt auf der Fläche f gehen und die selbe Tangentenrichtung haben, stimmen die Ausdrücke auf der rechten Seite überein, also

$$\kappa(t_0) \cos \sphericalangle (N(u(t_0)), e_2(t_0)),$$

für die beiden Kurven überein.

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $X \in T_u f$ mit $X \neq 0$. Die **Normalkrümmung von f in Richtung** X ist definiert als

$$\kappa_X := \frac{\mathrm{II}_u(X, X)}{\mathrm{I}_u(X, X)},$$

also $\kappa_{\lambda X} = \kappa_X$ für $\lambda \neq 0$. Dann heißt

$$\kappa_N(t) := \kappa(t)\,\langle e_2(t), N(u(t))\rangle = \kappa_{\dot{c}(t)}$$

auch die **Normalkrümmung der Kurve** (gleich der Normalkrümmung der Fläche in Richtung der Tangenten $\dot{c}(t)$).

Bemerkung Falls $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ linear abhängig sind, dann ist $\kappa(t) = 0$, $e_2(t)$ nicht definiert, dann setze $\kappa_N(t) = 0$.
Die Norm des Tangentialanteils von κe_2 ergibt sich also als (nach Pythagoras)

$$|\kappa_g| := \sqrt{\kappa^2 - \kappa_N^2}$$

Im Fall $n = 2$ definiere das **Darboux 3-Bein** E_1, E_2, E_3 durch

$$E_1(t) := e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

$$E_3(t) := N(u(t))$$

$$E_2(t) := E_3(t) \times E_1(t)$$

Dann sind κ_g, τ_g durch die Ableitungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} E_1^T \\ E_2^T \\ E_3^T \end{pmatrix}^\bullet = \|\dot{c}(t)\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_N \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_N & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^T \\ E_2^T \\ E_3^T \end{pmatrix}$$

definiert (in Analogie zu den Frenet-Gleichungen). Die Schiefsymmetrie folgt, da $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$ für alle t eine ONB bilden. Wegen $\kappa e_2 = \dot{e}_1 = \dot{E}_1 = \kappa_g E_2 + \kappa_N E_3$ folgt $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_N^2$.

Definition κ_g heißt die **geodätische Krümmung** der Kurve und τ_g die **geodätische Torsion** der Kurve.

weitere Bemerkungen Für $n = 2$ und $\|\dot{c}\| = 1$, dann gilt

1) $\boxed{\kappa_g = \det(\dot{c}, \ddot{c}, N \circ u)}$, dann

$$\det(\underbrace{\dot{c}}_{E_1}, \underbrace{\ddot{c}}_{\dot{E}_1}, \underbrace{N \circ u}_{E_3}) = \det(E_1, \kappa_g E_2 + \kappa_N E_3, E_3) = \kappa_g \det(E_1, E_2, E_3) = \kappa_g$$

2) $\boxed{\tau_g = \det(\dot{c}, N \circ u, (N \circ u)^\bullet)}$, denn

$$\det(\underbrace{\dot{c}}_{E_1}, \underbrace{N \circ u}_{E_3}, \underbrace{(N \circ u)^\bullet}_{\dot{E}_3}) = \det(E_1, E_3, -\kappa_N E_1 - \tau_g E_2) = -\tau_g \det(E_1, E_3, E_2) = \tau_g$$

3) κ_g ändert das Vorzeichen, bei
   (i) Spiegelungen der Fläche nicht
   (ii) bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen der a) Kurve und b) Fläche.

Definition Eine Kurve auf einer Hyperfläche heißt eine **Geodätische**, falls ihre geodätische Krümmung κ_g überall 0 ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $|\kappa_N| = |\kappa|$ für alle $t \in I$ bzw. (falls existent) $e_2(t) = \pm N(u(t))$ für alle $t \in I$.
Seien x, y zwei Punkte einer Hyperfläche. Eine **Kürzeste** zwischen x und y ist eine Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf f mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ mit minimaler Länge. Eine **Lokalkürzeste** ist eine Kurve $c = f \circ u : (a,b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf f, so dass für jedes $t \in (a,b)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $c\big|_{[t-\varepsilon.t+\varepsilon]}$ eine Kürzeste ist.

Beispiel Auf der Sphäre S^2 sind die Geodätischen genau die Großkreise.

! **Satz** *Die Geodätischen sind genau die Lokalkürzesten.*

Beispiel BÜLD

!!! **Satz und Definition** *1) Existenz von Geodätischen und Exponentialabbildung*
2) Existenz von «konvexen» Umgebungen (Whitehead (1932))

Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^3-Hyperfläche, $u \in U$.

1) Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass gilt: Zu jedem $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$ gibt es eine eindeutig bestimmte nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c_X : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $c_X(0) = f(u)$, $\dot{c}_X(0) = X$. Die Abbildung
$$\exp : \{z \in T_u f \mid \|z\| < \varepsilon\} \to \mathbb{R}^{n+1} : \exp(tX) := c_X(t) \quad (\|X\| = 1, 0 \leqslant t < \varepsilon)$$
ist injektiv und differenzierbar, die Einschränkung auf das Bild ist ein Diffeomorphismus. exp heißt die **Exponentialabbildung** zum Parameterwert u.
2) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von u, so dass $f|_V$ injektiv ist und es für je zwei Punkte u_1, $u_2 \in V$ eine Zahl l und eine eindeutig bestimmte nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c = f \circ u : [0, l] \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt mit $u(0) = u_1$, $u(1) = u_2$, $u([0, l]) \subset V$ und dieses ist auch die eindeutig Kürzeste zwischen $f(u_1)$ und $f(u_2)$ auf f.

Krümmungen

Generalvoraussetzungen Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Die Weingartenabbildung L_u ist selbstadjungiert bzgl. I_u. Daraus folgt (Satz aus der linearen Algebra), dass $T_u f$ eine ONB (bzgl. I_u) aus Eigenvektoren von L_u zu reellen Eigenwerten hat.

Definition (1) Die Eigenwerte $k_1(u) \leqslant \ldots \leqslant k_n(u)$ heißen **Hauptkrümmungen (HK)** von f in u.

(2) Die zugehörigen Eigenvektoren $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$ (d.h. $\mathrm{I}_u(X, X) = 1$ heißen die **Hauptkrümmungsrichtungen (HKR)** von f in u, d.h. X mit $\|X\| = 1$ ist HKR zur HK $k_i(u)$, falls $L_u(x) = k_i(u)x$.

(3) Die ***i*-te elementarsymmetrische Krümmung** $K_i(u)$ von f in u ist definiert durch die Gleichung
$$\begin{aligned}\det(L_u +_{(-)} \lambda \mathrm{id}) &= (k_1(u) +_{(-)} \lambda) \ldots (k_n +_{(-)} \lambda) \\ &=: \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i(u) (+_{(-)} \lambda)^{n-i} \quad (K_0(u) = 1)\end{aligned}$$
also insbesondere:
$$K_n = \det L_u = k_1 \cdot \cdots \cdot k_n$$
$$K_1 = \frac{1}{n} \operatorname{tr} L = \frac{1}{n}(k_1 + \ldots + k_n)$$

(4) $K(u) := K_n(u) = k_1(u) \cdot \ldots \cdot k_n(u) = \det L_u$ heißt die **Gauß-Krümmung** (oder für $n \geqslant 3$ auch **Lipschitz-Killing-Krümmung)** von f in u.
$H(u) := K_1(u) = \frac{1}{n}(k_1(u) + \ldots + k_n(u)) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} L_u$ heißt die **mittlere Krümmung** von f in u.

Fund2-04 **Satz 4.4** *(a) Es gibt eine ONB (bzgl. I_u), $(X_1, \ldots, X_n)$ von $T_u f$ aus HKR von f (mit $L_u X_i = k_i(u) X_i$)*

(b) Für die zugehörigen HK gilt $k_i(u) = \kappa_{X_i}(u)$, d.h. die HK ist die Normalkrümmung in Richtung der zugehörigen HKR.

(c) Falls $f \in C^r$, dann sind die $K_i(u) \in C^{r-2}$

Beweis. (a) Schon gezeigt (siehe Anfang vom Abschnitt)

(b) Es gilt

$$\kappa_{X_i}(u) = \mathrm{II}_u(X_i, X_i) = \mathrm{I}_u(L_u(X_i), X_i) = \mathrm{I}_u(k_i(u)X_i, X_i) = k_i(u)\underbrace{\mathrm{I}_u(X_i, X_i)}_{=1\ (\text{Vor.})}$$

(c) $L_u \in C^{r-2}$, also $\det(L_u + \lambda \mathrm{id}) \in C^{r-2}$ als Funktion von u, also $K_i(u) \in C^{r-2}$

■

Beispiel Für die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind die HK alle gleich 1, also

$$\det(L_u + \lambda \mathrm{id}) = (1+\lambda)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i \lambda^{n+i},$$

also folgt $K_1 = ... = K_n = 1$. Dies ist die Motivation für die Faktoren $\binom{n}{i}$ bei der Definition der $K_i(u)$. Für die Sphäre vom Radius $r > 0$ sind die HK alle $\frac{1}{r}$, also

$$\det(L_u + \lambda \mathrm{id}) = \left(\frac{1}{r} + \lambda\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{r^i} \lambda^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i \lambda^{n-i},$$

also $K_i = \frac{1}{r^i}$.

Bemerkung (1) Falls einer HK k_i nur einfach auftritt (d.h. $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$), dann ist die HKR bis auf einen Faktor ± 1 eindeutig bestimmt.
Falls $k_{i+1}(u) = ... = k_{i+r}(u)$ und alle HK davon verschieden sind, dann ist die zugehörige Eigenraum genau r-dimensional, d.h. die zugehörigen HKR sind genau die Einheitsvektoren (bzgl. I_u), die in diesem Eigenraum liegen.

(2) Man kann zeigen, dass die $k_i(u)$ mit $k_1(u) \leqslant ... \leqslant k_n(u)$ stetige Funktionen von u sind (aber im Allgemeinen nicht differenzierbar), aber falls für $\tilde{U} \subset U$ offen und es gilt $k_i(u) \neq k_j(u)$ für $i \neq j$ für alle $u \in \tilde{U}$, dann ist $k_i\big|_{\tilde{U}} \in C^{r-2}$, falls $f \in C^r$.

Beispiel $\lambda^2 - (u_1^2 + u_2^2) = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. λ_1 und λ_2 sind stetig, aber in $(0,0)$ nicht differenzierter, obwohl die Koeffizienten des Polynoms in C^∞ sind.

Fund2-05 **Lemma 4.5** *Seien $\mathcal{G}(u) = (g_{ij})_{i,j}$, $\mathcal{H}(u) = (h_{ij})_{i,j}$ bzw. $L(u) = (h^i_j(u))_{i,j}$ die Matrizen von I_u, II_u bzw. L_u bzgl. der Standardbasis $\mathrm{D}f\big|_u(e_i)$ auf $T_u f$.*
$\mathcal{G}(u)^{-1} = (g^{ij}(u))_{i,j}$. Dann gilt:

$$K(u) = \det L(u) = \frac{\det \mathcal{H}(u)}{\det \mathcal{G}(u)},$$

$$H(u) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} L(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g^{ji}(u) h_{ij}(u).$$

Beweis. $L(u) = \mathcal{G}(u)^{-1}\mathcal{H}(U)$, also

$$\det L(u) = \frac{\det \mathcal{H}(u)}{\det \mathcal{G}(U)}$$

$$\operatorname{tr} L(u) = \sum_{j=1}^{n} h^j_j(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g^{ji}(u) h_{ij}(u)$$

■

Fund2-06 !!! **Satz 4.6 (Bestimmung der Normalkrümmung aus den HK)** *Seien $X_1, ..., X_n \in T_u f$ ONB von $T_u f$ aus HKR zu den HK $k_1, (u), ..., k_n(u)$. Sei $X = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i X_i$ mit $\sum \lambda_i^2 = 1$. Dann ist*

$$\|X\|^2 = \mathrm{I}(\sum \lambda_i X_i, \sum \lambda_i X_i) = \sum \lambda_i^2 = 1,$$

da $\mathrm{I}(X_i, X_j) = \delta_{ij}$:

$$\mathrm{II}(X, X) = \mathrm{I}\left(L_u(\sum \lambda_i X_i), \sum \lambda_i X_i\right) = \mathrm{I}\left(\sum \lambda_i k_i(u) X_i, \sum \lambda_i X_i\right) = \sum \lambda_i^2 k_i(u),$$

also

$$\boxed{\kappa_X(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 k_i(u)}$$

Beweis. Nachgerechnet im Satz. ■

Definition Bezeichne: $\kappa_- : S^{n-1} \subset T_u f \to \mathbb{R}$ (u fest) die Abbildung $x \mapsto \kappa_X(u)$, wo $S^{n-1} = \{X \in T_u f \mid \|X\| = 1\}$.

Fund2-07 **Folgerung 4.7** *Seien $k_1(u) \leqslant ... \leqslant k_n(u)$ die HK von f. Dann gilt:*

$$k_1(u) = \min\left\{\kappa_X(u) \mid X \in S^{n-1}\right\}, \kappa_X(u) = k_1(u) \Longleftrightarrow X \text{ ist HKR zu } k_1(u)$$

$$k_n(u) = \max\left\{\kappa_X(u) \mid X \in S^{n-1}\right\}, \kappa_X(u) = k_n(u) \Longleftrightarrow X \text{ ist HKR zu } k_n(u),$$

also die Funktion $\kappa_- : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum genau in der HKR zu $k_1(u)$ und ihr Maximum genau in den HKR zu $k_n(u)$ an.
Im Fall $n = 2$ sind die HKR genau diejenigen $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$, für die $\kappa_X(u)$ extremal wird.

Beweis. Nach Satz 4.6 gilt $\kappa_X(u) = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i^2 k_i(u)$, wobei $X = \sum_i \lambda_i X_i$, $\sum \lambda_i^2 = 1$, $X_1, ..., X_n$ ONB aus HKR zu den HK $k_1(u), ..., k_n(u)$. Also

$$\kappa_X(u) = k_1(u) + \sum_{2 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i^2 \underbrace{(k_i(u) - k_1(u))}_{\geqslant 0},$$

also $\kappa_X(u) \geqslant k_1(u)$ mit «=» $\Longleftrightarrow$ X HKR zu $k_1(u)$ falls $\lambda_i \neq 0$, muss $k_i(u) = k_1(u)$
$\kappa_X(u) \leqslant k_n(u)$ und «=» $\Longleftrightarrow$ X HKR zu $k_n(u)$ genau entsprechnend ■

Fund2-08 **Satz 4.8 (Olinde-Rodrigues)** *Sei $X \in T_u f$, $\|X\| = 1$ ist genau dann eine HKR, wenn die Funktion $\kappa_-(u) : S^{n-1} \subset T_u f \to \mathbb{R}$ (n fest), $Y \mapsto \kappa_Y(u)$ einen stationären Wert an der Stelle X hat, d.h. $\kappa_Y(u) - \kappa_X(u) = o(\|Y - X\|)$ für $Y \to X$ mit $Y \in T_u f$, $\|Y\| = 1$*

Beweis. Seien wie in 4.6 $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$ bzgl. der ONB $X_1, ..., X_n$ von $T_u f$ (aus HKR) dargestellt werden, also

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1.$$

Da $\kappa_X = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i^2 k_i$ ist, sind die stationären Werte der Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i^2 k_i$$

unter der Nebenbedingung

$$G(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum_i \lambda_i^2 - 1 = 0$$

zu bestimmen. Nach der Multiplikationsregel von Lagrange hat F genau dann einen stationären Wert an der Stelle X unter der Nebenbedingung $G \overset{!}{=} 0$, wenn es eine Zahl λ gibt, so dass alle partiellen Ableitungen

$$\left.\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial\lambda_i}\right|_x = 0$$

sind und $G(x) = 0$. Also

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial\lambda_i}\right|_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} &= 2\lambda_i k_i - 2\lambda\lambda_i \\ &= 2\lambda_i(k_i-\lambda) \overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

für alle $i = 1,\dots,n$ ergibt für jedes i: $\lambda_i = 0$ oder $\lambda = k_i$. Wegen $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ können nicht alle $\lambda_i = 0$, also gibt es ein j mit $\lambda = k_j$ und $\lambda_i = 0$ für alle i mit $k_i \neq k_j$, d.h. also

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

ist eine HKR zur HK k_j. ■

Definition Eine reguläre Kurve $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf der Hyperfläche f heißt eine **Krümmungslinie**, falls $\dot{c}(t)/\|\dot{c}(t)\|$ eine HKR ist für alle $t \in I$.
$X \in T_u f$ heißt eine **Asymptotenrichtung (ASR)** von f in u, falls $\mathrm{I}_u(X,X) = 1$ (d.h. $\|X\| = 1$) und $\mathrm{II}_u(X,X) = 0$, also $\kappa_x = 0$.
Eine reguläre Kurve $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf f heißt eine **Asymptotenlinie**, falls $\dot{c}(t)/\|\dot{c}(t)\|$ eine ASR für alle $t \in I$ ist, d.h. die Normalkrümmung der Kurve $\kappa_N(t) = \kappa_{\dot{c}(t)} = 0$ für alle $t \in I$ ist.

Bemerkung Es gibt *keine* Asymptotenrichtung genau dann, wenn alle HKR $k_i > 0$ oder alle HKR $k_i < 0$ sind.

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Die **Parameterlinien** auf f sind die Kurven $c(t) = f(te_i + a)$ (definiert auf Intervallen I für die $te_i + a \in U$).

Definition f heißt eine **Krümmungslinienparametrisierung**, falls alle Parameterlinien Krümmungslinien sind.
f heißt eine **Asymptotenlinienparametrisierung**, falls alle Parameterlinien Asymptotenlinien sind.

Fund2-09 **Beispiel 4.9** Eine Hyperfläche f, bei der die HK stets paarweise verschieden sind, ist eine Krümmungslinienparametrisierung genau dann, wenn die Matrizen I_u und II (bzgl. der natürlichen Basis $\mathrm{D}f_u(e_i)$) Diagonalmatrizen sind.

Beweis. $\Longrightarrow$ Die HKR (zu verschiedenen HKen) sind stets paarweise orthogonal, d.h. also die Matrix der ersten Fundamentalform

$$g_{ij}(u) = \left\langle \mathrm{D}f_u(e_i), \mathrm{D}f_u(e_j)\right\rangle = 0$$

für $i \neq j$ ist eine Diagonalmatrix und es gilt:

$$h_{ij} = \left\langle L\mathrm{D}f(e_i), \mathrm{D}f(e_j)\right\rangle = \left\langle k_i\mathrm{D}f(e_i), \mathrm{D}f(e_j)\right\rangle = 0 \text{ für } i \neq j.$$

$\Longleftarrow$ Wenn die Matrizen $\mathcal{G}(u)$ zu I_u und $\mathcal{H}(u)$ zu II_u Diagonalmatrizen, dann auch $L(u) = \mathcal{G}(u)^{-1}\mathcal{H}(u)$. Sei $c(t) = f(te_i + a)$ eine Parameterlinie. Dann ist $\dot{c}(t_0) = \mathrm{D}f_u(e_i)$ mit $u := te_i + a$. Die Parameterlinien sind also genau dann Krümmungslinien, wenn die natürliche Basis $\mathrm{D}f_u(e_i)$ von $T_u f$ aus HKR (nach Normierung) besteht. D.h., wenn die Matrix $L(u)$ von L_u bzgl. der natürlichen Basis Diagonalgestalt hat. ■

Definition Sei $n = 2$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^3$ hat in U einen

(i) **elliptischen Punkt**, falls $K(u) = k_1(u)k_2(u) > 0$

(ii) **hyperbolischen Punkt**, falls $K(u) = k_1(u)k_2(u) < 0$

(iii) **parabolischen Punkt**, falls $K(u) = k_1(u)k_2(u) = 0$ und $H(u) = \frac{1}{2}(k_1(u) + k_2(u)) \neq 0$ (d.h. $k_1 \vee k_2 = 0$)

(iv) **Flachpunkt**, falls $k_1(u) = k_2(u) = 0$

(v) **Nabelpunkt**, falls $k_1(u) = k_2(u)$

(vi) **eigentlichen Nabelpunkt**, falls $k_1(u) = k_2(u) \neq 0$.

Also ist jeder Punkt von genau einem der Typen (i) - (iv).

Fund2-10 **Bemerkung 4.10** Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche ($n = 2$). Wenn man $\pm X$ als *eine* ASR zählt, gilt:

(a) f ist in u elliptisch $\Longleftrightarrow$ f in u keine ASR

(b) f ist in u hyperbolisch $\Longleftrightarrow$ f in u genau zwei ASR

(c) f ist in u parabolisch $\Longleftrightarrow$ f in u genau eine ASR

(d) f ist in u einen Flachpunkt $\Longleftrightarrow$ jedes $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$ ist eine ASR

Beweis. Seien X_1, X_2 (orthogonale) HKR zu den HK $k_1(u)$, $k_2(u)$. Sei $X \in T_u f$ und $\|X\| = 1$ (und $\langle X, X_2\rangle \geqslant 0$) und o.E. $\pm X$ als eine ASR gezählt. Dann gibt es λ mit $|\lambda| \leqslant 1$, so dass

$$X = \lambda X_1 + \sqrt{1-\lambda^2}X_2.$$

Nach Satz 4.6 ist $\kappa_X(u) = \lambda^2 k_1(u) + (1-\lambda^2)k_2(u)$, also

$$X \text{ ASR} \Longleftrightarrow \lambda^2 k_1(u) + (1-\lambda^2)k_2(u) = 0,$$

also

$$\lambda^2 = \frac{k_2(u)}{k_2(u) - k_1(u)}.$$

Falls f in u

(a) elliptisch ist, ist $k_1(u)k_2(u) > 0$, also $\lambda^2 > 1$, also existiert keine ASR.

(b) hyperbolisch ist, ist $k_1(u) < 0 < k_2(u)$, also $0 < \lambda^2 < 1$, also existieren zwei ASR

(c) parabolisch ist, ist $k_1(u)k_2(u) = 0$ und $k_1(u) + k_2(u) \neq 0$, also $\lambda = 0$ und $\pm X_2$ einzige ASR oder $\lambda = \pm 1$ und $\pm X_1$ einzige ASR.

(d) einen Flachpunkt besitzt, ist $k_1(u) = k_2(u)$, also ist jedes $X \in T_u f$ mit $\|X\| = 1$ ASR.

Die umgekehrten Implikationen folgen automatisch, da links eine vollständige (disjunkte) Fallunterscheidung steht und die Aussagen rechts sich gegenseitig ausschließen. ■

Fund2-12 **Satz 4.11 (Invarianzeigenaschaften der Krümmungen)** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche.*

(a1) Sei $\varphi : V \to U$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann stimmen für $\tilde{f}$ in v und f in $\varphi(v)$ sämtliche HK k_i und die zugehörigen HKR und die elementarsymmetrischen Krümmungen K_i insbesondere K und H überein, ferner die ASR.

Falls $c = (f \circ \varphi) \circ u = f \circ (\varphi \circ u)$ eine Krümmungslinie bzw. Asymptotenlinie von f ist, dann auch von $\tilde{f}$ und umgekehrt.

(a2) Sei $\varphi : V \to U$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann kehrt sich bei den HK jeweils das Vorzeichen um $\tilde{k}_i(v) = -k_{n-i}(v)$, also gilt $K_i(\varphi(v)) = (-1)^i \tilde{K}_i(v)$, insbesondere $H(\varphi(v)) = -\tilde{H}(V)$, $K(\varphi(v)) = (-1)^n \tilde{K}(v)$.
Die HKR, ASR, Krümmungslinien, Asymptotenlinien von f und $\tilde{f}$ stimmen überein.

(b1) Sei $B : \mathbb{R}^n n+1 \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Bx = Ax + b$, $A \in SO(n+1)$ eine eigentliche Bewegung, $\tilde{f} = B \circ f$. Dann stimmen für f und $\tilde{f}$ in u die KH k_i , die elementarsymmetrischen Krümmungen K_i, insbesondere K und H, überein. Die HKR, ASR von $\tilde{f}$ entstehen aus denen von f durch Anwendung von A (aufgefasst als lineare Abbildung $T_u f \to T_u \tilde{f}$.
Falls $c = f \circ u$ eine Krümmungeslinie bzw. Asymptotenlinie von f ist, dann $B \circ c = (B \circ f) \circ u = \tilde{f} \circ u$ eine solche von $\tilde{f}$.

(b2) Sei $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $B(x) = Ax + b$, $A \in O(n+1)$ mit $\det A = -1$ eine uneigentliche Bewegung. Dann kehrt sich bei den HK jeweils das Vorzeichen um, also gilt $K_i(v) = (-1)^i K_i(v)$ insbesondere $H(v) = -\tilde{H}(v)$, $K(v) = (-1)^n \tilde{K}(v)$.
Für die HKR, ASR, Krümmungslinien bzw. Asymptotenlinien gilt das gleiche wie in b1).

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Invarianzigenschaften von I, II und L aus Satz 4.2 und den Definitionen.
Beispielsweise für a2) und b2)

$$LX = kX \Longleftrightarrow (-L)X = (-k)X$$

und

$$(-ALA^{-1})(AX) = -ALX$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}(k_1 + \lambda)\cdots(k_n + \lambda) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i \lambda^{n-i} \\ (-k_1 + \lambda)\cdots(-k_n + \lambda) &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i \lambda^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{(-1)^i K_i}_{=\tilde{K}_i} \lambda^{n-i}\end{aligned}$$

■

Fund2-13 **Feststellung 4.12** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $a > 0$, $\tilde{f} = af$. Dann gilt (bei natürlicher Identifikation von $T_u f$ und $T_u \tilde{f}$) $\tilde{N} = N$, $\tilde{\mathrm{I}}_u = I_u$, $\tilde{\mathrm{II}}_u = \frac{1}{a}\,\mathrm{II}_u$, $\tilde{L}_u = \frac{1}{a} L_u$ und $\tilde{k}_i(u) = \frac{1}{a} k_i(u)$ mit den selben HKR $\tilde{K}_i(u) = \frac{1}{a} K_i(u)$.*
Für die **Matrizen** *der Fundamentalform und der Weingartenabbildung bzgl. der jeweiligen natürlichen Basen $\mathrm{D}f\big|_u(e_i)$ bzw. $\mathrm{D}\tilde{f}\big|_u(e_i)$: $\tilde{\mathcal{G}}(u) = a^2 \mathcal{G}(u)$, $\tilde{\mathcal{H}}(u) = a\mathcal{H}(u)$, $\tilde{L}(u) = \frac{1}{a} L(u)$.*

Beweis. Gilt $\tilde{N} = N$, $\tilde{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$ klar. Weiter ist $\tilde{L} = -\mathrm{D}\tilde{\mathrm{N}} \circ \mathrm{D}\tilde{f}\big|^{-1} = -\mathrm{DN} \circ (a\mathrm{D}f)^{-1} = \frac{1}{a} L$, also $\tilde{\mathrm{II}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{II}$

und $\tilde{k}_i = \frac{1}{a}k_i$ wegen $L_u(x) = k_i(u)X$

$$\det(\tilde{L}_u + \lambda\mathrm{id}) = \det\left(\frac{1}{a}L_u + \lambda\mathrm{id}\right) = \frac{1}{a^n}\det(L_u + (a\lambda)\mathrm{id})$$
$$= \frac{1}{a^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i(u)(a\lambda)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{(K_i(u)a^{-i})}_{=\tilde{K}_i(u)}\lambda^{n-i}$$

Für die Matrizen $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ ergibt sich ($\mathrm{D}\tilde{f} = a\mathrm{D}f_u$, also andere Basis!)

$$\tilde{g}_{ij}(u) = \left\langle \mathrm{D}\tilde{f}_u(e_i), \mathrm{D}\tilde{f}_u(e_j)\right\rangle = a^2\left\langle \mathrm{D}f_u(e_i), \mathrm{D}f_u(e_j)\right\rangle = a^2 g_{ij}, \text{ also } \tilde{\mathcal{G}} = a^2\mathcal{G}$$
$$\tilde{h}_{ij}(u) = \left\langle \tilde{N}, \frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial u_i\partial u_j}\right\rangle = a\left\langle N(u), \frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial u_i\partial u_j}\right\rangle = ah_{ij}(u), \text{ also } \tilde{H}(u) = a\mathcal{H}(u)$$
$$\tilde{L}(u) = \tilde{\mathcal{G}}(u)^{-1}\tilde{\mathcal{H}}(u) = \frac{1}{a}L(u)$$

■

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Die **Dupinsche Indikatrix** von f an der Stelle $u \in U$ ist $\{X \in T_u f \mid \mathrm{II}_u(X,X) = \pm 1\}$.

Definition $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt eine **Graphenfläche**, falls

$$f(u_1,...,u_n) = (u_1,...,u_n,F(u_1,...,u_n))),$$

kurz: $f(u) = (u, F(u))$, wobei $F : U \to \mathbb{R} \in C^2$.

Beispiel Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Graphenfläche mit $f(u) = (u, F(u))$, $F \in C^2$ mit $0 \in U$, $F(0) = 0$ und $(\operatorname{grad} F(0))^T = \mathrm{D}f_0 = 0$. Dann ist $\mathrm{D}f_0(x) = (x, 0)$, also $N(0) = (0,0,...,0,1)$,

$$g_{ij}(0) = \left\langle \mathrm{D}f_0(e_i), \mathrm{D}f_0(e_j)\right\rangle = \delta_{ij}, \text{ also}$$
$$\mathcal{G}(0) = E,$$
$$h_{ij}(0) = \left\langle N(0), \left.\frac{\partial^2 f}{\partial u_i\partial u_j}\right|_0\right\rangle = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i\partial u_j}$$

Matrix von L_0: $h^i_j(0) = h_{ij}(0)$, da $\mathcal{G}(0) = E$. Also sind die HK die Eigenwerte der Hesse-Matrix von F

$$\operatorname{Hess} F := \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i\partial u_j}\right)_{i,j}$$

und die HKR die normierten Eigenvektoren von $\operatorname{Hess} F$. Nach der Taylor-Formel gilt (mit $u = (u_1,...,u_n)$)

$$F(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}u_iu_j + o(\|u\|^2)$$

Wenn spezieller: $e_1,...,e_n$ ONB aus Eigenvektoren von L_0, dann ist

$$F(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i(0)u_i^2 + o(\|u\|^2)$$

Im Fall $n = 2$ ist die approximative Funktion

$$F(u) = \frac{1}{2}k_1(0)u_1^2 + \frac{1}{2}k_2(0)u_2^2$$

und die zugehörige Graphenfläche ist ein

(a) elliptischer Paraboloid, falls

$$K(u) = k_1(u)k_2(u) > 0$$

Dann sind die Höhenlinien Ellipsen.

(b) ein hyperbolischer Paraboloid, falls

$$K(u) = k_1(u)k_2(u) < 0$$

Dann sind die Höhenlinien Hyperbeln.

(c) parabolischer Zyklinder, falls

$$K(u) = k_1(u)k_2(u) = 0 \text{ bzw. } k_1(u) \neq 0 \vee k_2(u) \neq 0$$

Dann sind die Höhenlinien Paar paralleler Geraden.

Flächpunkte können viele Formen annehmen (Affensattel). Andere Beispiele: Betrachte

$$f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, F(u_1, u_2)), \quad F(u_1, u_2) = u_1^3 - 3u_1u_2^2$$

Dann ist die Niveaumenge von 0: $u_1 = 0$ oder $u_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}u_1$.

Sei $X_1, ..., X_n$ eine ONB von T_uf aus HKR. Dann ist für $X = \sum_i \lambda_i X_i$ nach Proposition 4.6

$$\mathrm{II}_u(X, X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 k_i(u)$$

also ist die Dupinsche Matrix

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i X_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 k_i(u) = \pm 1 \right\}$$

Also stimmt sie mit der Vereinigung der Niveaumenge der approximativen Funktion der Graphenfläche zum Niveau $\pm\frac{1}{2}$ überein.

Für $n = 2$ ist dies für

(i) elliptische Punkte, d.h. $K(u) = k_1(u)k_2(u) > 0$ eine Ellipse mit Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{|k_i|}}$ (ein Kreis $\iff k_1(u) = k_2(u) \neq 0$, also ein eigentlicher Nabelpunkt)

(ii) hyperbolische Punkte, d.h. $K(u) = k_1(u)k_2(u) < 0$ ein Paar von Hyperbeln mit denselben Asymptoten

(iii) parabolische Punkt, z. B. $k_1(u) = 0$, $k_2(u) > 0$.

und02-15 **Satz 4.13 (lokale Normalform)** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^r-Hyperfläche, $u_0 \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 und eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi : U_0 \to V$ mit $0 \in V$ und $\varphi(u_0) = 0$ und eine eigentliche Bewegung $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $f = B \circ \tilde{f} \circ \varphi$ gilt*

!!! *mit*

$$\tilde{f}(v_1, ..., v_n) = \left(v_1, ..., v_n, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i(u_0) v_i^2 + o(\|v\|^2) \right)$$

Beweis. Sei o.E. $f(u_0) = 0$ (Translation). Wir geben eine eigentliche Bewegung B und eine Parametertransformation $\varphi : U_0 \to V$ an, so dass $f(x) = B\tilde{f}\varphi(x)$ und $\tilde{f}(v) = (v, F(v))$ eine Graphenfläche ist mit $F(0) = 0$ und $\mathrm{D}f_0 = 0$. Aus der Bestimmung der HK von solchen Graphenflächen und den Invarianzeigenschaften folgt die Behauptung.

Wähle eine ONB $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ aus HKR in T_uf gleich orientiert wie die natürliche Basis $(\mathrm{D}f_{u_0}(i))_{i \leqslant n}$. Bezeichne $c : \mathrm{D}f_{u_0}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ die zugehörige Koordinatenabbildung, d.h.

$$c\left(\sum_{i \leqslant n} a_i X_i \right) = (a_1, ..., a_n)$$

Definiere für $u \in U$:

$$\psi(u) = \underbrace{f(u) - \langle f(u), N(u_0)\rangle N(u_0)}_{\in N(u_0)^\perp = \mathrm{D}f_{u_0}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\mathrm{D}\psi\big|_{u_0} = \mathrm{D}f\big|_{u_0} - \underbrace{\left\langle \mathrm{D}f\big|_{u_0}, N(u_0)\right\rangle}_{=0} N(u_0)$$

ist injektiv (f regulär), also gibt es eine Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0, so dass $\psi\big|_{U_0}^{\psi(U_0)}$ Diffeomorphismus ist (C^r, falls $f \in C^r$). Definiere $V := c_0\psi(U_0)$, $\varphi : U_0 \to V \subset \mathbb{R}^n$, durch

$$\varphi(u) = c\psi(u).$$

φ ist dann auch ein (C^r)-Diffeomorphismus. Definiere weiter $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\begin{aligned} B(a_1, ..., a_{n+1}) &:= \sum_{i \leqslant n} a_i X_i + a_{n+1} N(u_0) \\ &= c^{-1}(a_1, ..., a_n) + a_{n+1} N(u_0) \end{aligned}$$

und $B \in SO(n+1)$ nach Wahl der Basis $X_1, ..., X_n$. $f : V \to U_0$ durch

$$\tilde{f}(v) := (v, F(v))$$

Graphenfläche mit

$$F(v) := \left\langle f\varphi^{-1}(u), N(u_0)\right\rangle$$

Dann ist

$$\begin{aligned} B\tilde{f}\varphi(u) &= B\left(c \circ \psi(u), \langle f(u), N(u_0)\rangle\right) \\ &= \psi(u) + \langle f(u), N(u_0)\rangle N(u_0) = f(u) \\ \mathrm{D}f_0 &= \left\langle \mathrm{D}f_{\varphi^{-1}(0)} \circ \mathrm{D}\varphi^{-1}\big|_{u_0}, N(u_0)\right\rangle = 0 \end{aligned}$$

und $F(0) = 0$ klar, wegen $f(u_0) = 0$. ■

Regelflächen

Definition Eine Fläche der Form (eventuell mit Singularitäten) $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t)$ heißt eine **Regelfläche**, wobei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3 \in C^1$ und $w : I \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $w \in C^1$ sind (also $\|w\| = 1$). Die Kurve $\alpha(t)$ heißt die **Leitkurve** von f und die Geraden $L_t := \alpha(t) + \mathbb{R}w(t)$ heißen **Regelgeraden**. Die Familie der Geraden L_t, $t \in I$, nennt man eine **ein-Parameter-Familie** von Geraden.

Eine Fläche $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^3$ für die eine Parametertransformation $\varphi : \tilde{U} \to U$ existiert, sodass $\tilde{f} \circ \varphi$ die Einschränkung einer Regelfläche (wie oben erklärt) ist, nennt man ebenfalls eine Regelfläche.

Beispiel (1) Zylinder: w ist konstant und α eine ebene Kurve (in einer Ebene nicht parallel zu w)

(2) Kegel: α ist eine ebene Kurve und alle Regelgeraden gehen durch denselben Punkt, der nicht in der Ebene liegt (oder andere Darstellung: α konstant)

(3) Wendelfläche (helicoid): $f(t,u) = \Big(u\cos t, u\sin t, at\Big)$ mit $a \neq 0$ (konstant), also $f(t,u) = (0,0,at) + u(\cos t, \sin t, 0)$

(4) $\alpha(t) = \Big(\cos t, \sin t, 0\Big)$, $w(t) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$, also

$$f(t,v) = \Big(\cos t - \frac{v}{\sqrt{2}}\sin t, \sin t + \frac{v}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{v}{\sqrt{2}}\Big)$$

Mit $x = f_1$, $y = f_2$, $z = f_3$ ergibt sich $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + \frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$, also gerade die Gleichung für ein Rotationshyperboloid.

Definition Wenn $\dot{w}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, dann heißt die Regelfläche **nicht zylindrisch**.

Falls nun isolierte Stellen mit $\dot{w}(t) = 0$ hat, dann kann man die Regelfläche in Teile zerlegen und diese einzeln verbinden.

min-16 **Definition und Satz 4.14** Sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) + v \cdot w(t)$ eine nicht zylindrische Regelfläche. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ auf der Fläche, so dass $\big\langle \dot{\beta}(t), \dot{w}(t)\big\rangle = 0$ ist für alle $t \in I$. Man nennt $\beta(t)$ die **Striktionslinie** oder **Kehllinie** von f und die Punkte $\beta(t)$ die **Zentralpunkte**.

Beweis. Da β auf der Fläche liegen soll, ist β von der Form

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t),$$

$u : I \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} + \dot{u}w + u\dot{w},$$

also wegen $\langle w, \dot{w}\rangle = 0$, da $\|w\| = 1$ nach Voraussetzung. Nun ist $0 = \big\langle \dot{\beta}, \dot{w}\big\rangle = \langle \dot{\alpha}, \dot{w}\rangle + u\,\langle \dot{w}, \dot{w}\rangle$ und damit

$$u = -\frac{\langle \dot{\alpha}, \dot{w}\rangle}{\|\dot{w}\|^2}$$

(beachte $\|\dot{w}\| \neq 0$ nach Voraussetzung). Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt und die gesuchte Kurve ist

$$\boxed{\beta := \alpha - \frac{\langle \dot{\alpha}, \dot{w}\rangle}{\|\dot{w}\|^2} w}$$

■

Sei nun im Weiteren die Leitlinie der Regelflächen die Striktionslinie, also $f(t,u) = \beta(t) + uw(t)$, $t \in I$, $a \in \mathbb{R}$, $\big\langle \dot{\beta}, \dot{w}\big\rangle = 0$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = \dot{\beta}(t) + u\dot{w}(t)$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) = w(t),$$

also die Matrix der ersten Fundamentalform von f ist:

$$(g_{ij})_{i,j} := \begin{pmatrix} \|\dot{\beta}\|^2 + u^2\|\dot{w}\|^2 & \langle \dot{\beta}, w\rangle \\ \langle \dot{\beta}, w\rangle & 1 \end{pmatrix}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial u} = \dot{\beta} \times w + u(\dot{w} \times w),$$

wegen $\langle \dot{w}, w \rangle = 0$ und $\langle \dot{w}, \dot{\beta} \rangle = 0$ ist

$$\dot{\beta} \times w = \lambda \dot{w},$$

mit einer Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$, nämlich

$$\langle \dot{\beta} \times w, \dot{w} \rangle = \lambda \|\dot{w}\|^2,$$

also

$$\boxed{\lambda = \frac{\det(\dot{\beta}, w, \dot{w})}{\|\dot{w}\|^2}}$$

und

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial u} \right\|^2 &= \|\lambda \dot{w} + u(\dot{w} \times w)\|^2 \\ &= \lambda^2 \|\dot{w}\|^2 + u^2 \|\dot{w}\|^2 \\ &= \left(\lambda^2 + u^2\right) \|\dot{w}\|^2 \end{aligned}$$

Es folgt, dass die einzigen singulären Punkte der Regelfläche auf der Striktionslinie liegen ($u = 0$) und nur auftreten, wenn $\lambda(t) = 0$ ist.

Definition Die obige Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$ heißt der **Verteilungsparameter** oder **Drall** der Regelfläche.

Für die Gaußkrümmung K der Regelfläche gilt

$$K(t, u) = -\frac{\lambda^2}{(\lambda(t)^2 + u^2)^2}$$

Beweis. Nachrechnen (Übung). ■

Also: Die Gaußkrümmung einer nicht zyklischen Regelfläche ist überall $\leqslant 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $\lambda(t) = 0$, d.h. längs der Regelgeraden, welche die Striktionslinie in einem singulären Punkt trifft. Für feste t mit $\lambda(t) \neq 0$ ist der Betrag der Gaußkrümmung längs einer Regelgeraden ist $u \mapsto |K(u, t)|$ eine stetige Funktion (auf der Regelgeraden), die symmetrisch zum Zentralpunkt ($u = 0$) ist und dort ihr Maximum annimmt ($K(t, 0) = -1/\lambda(t)^2$). Sei $\lambda(t) \neq 0$, dann gilt für den Winkel φ zwischen $N(t, u)$ und $N(t, 0)$ (nachrechnen!)

$$\tan \varphi = \frac{u}{|\lambda|}$$

Spezielle Typen von Regelflächen

Definition Eine Regelfläche heißt **Tangentenfläche** einer Kurve β, wenn $w = \frac{\dot{\beta}}{\|\dot{\beta}\|}$ ist, d.h. wenn die Regelgeraden die Tangenten der Kurve sind. β ist dann automatisch die Striktionslinie. Ferner ist dann $\lambda = 0$, also $K = 0$.
Eine Regelfläche heißt eine **Schraubregelfläche**, falls sie durch Schraubung (oder Drehung) (einer Parametergruppe) einer Geraden entsteht. Dies ist für $\|\dot{\beta}\|$ (β Kehllinie) konstant genau dann der Fall, wenn auch $\langle \dot{\beta}, w \rangle$, $\|\dot{w}\|$, λ und $\det(w, \dot{w}, \ddot{w})$ konstant sind.

Spezialfälle: Wendelfläche, Drehhyperboloid.

Beweis. Siehe z. B. Kühnel. ■

Definition Eine Regelfläche heißt eine **Torse**, falls $K = 0$ ist.

Es gilt der folgende

Satz *(a) In einer Torse gibt es eine offene dichte Teilmenge, die aus Stücken von Ebenen, Kegeln, Zylindern und Tangentenflächen besteht.*
(b) Wenn f Flachpunkt-frei ist und $K = 0$, dann ist f (bis auf Umparametrisierung) eine Regelfläche, also eine Torse.

Beweis. Vgl. z. B. Kühnel. ■

Satz *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche sind äquivalent:*
(i) $K = 0$, d.h. f ist eine Torse
(ii) Entlang jeder Regelgeraden ist N konstant (d.h. die Flächennormalen sind zueinander parallel)
(iii) Die Fläche ist **abwickelbar**, *d.h. es gibt zu jedem Punkt eine Bewegung, die isometrisch zu einem ebenen Flächenstück ist*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Folgt aus $\tan\varphi = \frac{u}{|\lambda(t)|}$, falls $\lambda(t) \neq 0$ und für $\lambda(t) = 0 \Longleftrightarrow K(t,a) = 0$.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Klar.

■

Minimalflächen

Definition Eine Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißt eine **Minimalfläche**, falls $H(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Bemerkung Im Fall $n = 2$ ist $H = 0 \Longleftrightarrow k_1 = -k_2$, also $K = -k_1^2 \leqslant 0$, d.h. auf einer Minifläche ist jeder Punkt hyperbolisch oder Flachpunkt.

Ursprung: **Plateau-Problem** (Lagrange 1760, Plateau 1868)

$\boxed{\text{Für } n = 2}$ Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Kurve, die stückweise C^1 ist.

Gesucht: Eine Fläche f, die den Flächeninhalt minimiert und c als Rand hat. Werden Zeigen: Eine solche Fläche ist eine Minimalfläche, d.h. $H = 0$, in allen regulären Punkten von f.

Physikalisch: Die Oberflächenspannung einer Seifenhaut in einer Drahtschlinge minimiert den Flächeninhalt. Sie ergibt also eine Minimalfläche, eventuell mit Singularitäten. Seifenblasen/Schaum sind Flächen mit $H = \text{const}$ auf jedem Flächenstück (cmc-surface, «constant mean curvature»), Druckdifferenz zwischen innen und außen.

Zum Plateauproblem: Lösung von Douglas, Radó (ca. 1930) für c einfach C^1-geschlossen.

Es gibt ein Flächenminimierendes f reguläre auf U offen, $\overline{U} = U \cup \partial U$ homöomorph zur abgeschlossen Kreisscheibe $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^3 \in C^1$, $f\big|_{\partial U} = c$. Falls c regulär und analytisch, dann ist f sogar regulär auf $\overline{U}$.

Fragen: Wann ist f eindeutig? injektiv?
Aufpieksen wenn Fläche rundum von Singularitäten umgeben.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Betrachte C^2-Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, die C^1-fortsetzbar auf $\overline{U}$ ist mit folgender Eigenschaft: f hat den kleinsten Flächeninhalt unter allen C^2-Hyperflächen $g : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, die auf $\overline{U}$ C^1-fortsetzbar sind mit $g\big|_{\partial U} = f\big|_{\partial U}$.
Gesucht: Eine geometrisch notwendige Bedingung, die eine solche Hyperfläche f erfüllen muss.
Lösung: «Variationsproblem: » Betrachte eine Variation in Normalenrichtung

$$f^\varepsilon(u) := f(u) + \varepsilon\varphi(u)N(u),$$

mit beliebiger (aber festen) C^2-Funktion $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi\big|_{\partial U} = 0$:

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} + \varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \cdot N + \varepsilon\,\varphi\frac{\partial N}{\partial u_i}$$

Wegen $\langle \partial_{u_i} f, N\rangle = 0$ und $\langle N, \partial_{u_i} N\rangle = 0$, ergibt sich die Matrix (g^ε_{ij}) der 1. Fundamentalform als

$$\begin{aligned} g^\varepsilon_{ij} &= \left\langle \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial u_i}, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial u_j} \right\rangle = g_{ij} + \varepsilon\varphi \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle}_{=-h_{ij}} + \varepsilon\varphi \underbrace{\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle}_{=-h_{ij}} + O(\varepsilon^2) \\ &= g_{ij} - 2\varepsilon\varphi h_{ij} + O(\varepsilon^2) \\ \mathcal{G}^\varepsilon &= \mathcal{G} - 2\varepsilon\varphi\mathcal{H} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_0 \det \mathcal{G}^\varepsilon &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_0 \det\left(\mathcal{G}(E - 2\varepsilon\varphi\mathcal{G}^{-1}\mathcal{H})\right) \\ &= (\det\mathcal{G})(-2\varphi\operatorname{tr}(\mathcal{G}^{-1}\mathcal{H}), \end{aligned}$$

denn

$$\det(E + \varepsilon A) = \det\begin{pmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & & \vdots \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & \cdots & \cdots & 1+\varepsilon a_{nn} \end{pmatrix} = 1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_0 \det\mathcal{G}^\varepsilon &= -2\varphi(\det\mathcal{G})\operatorname{tr}\underbrace{(\mathcal{G}^{-1}\mathcal{H})}_{=L} \\ &= -2\varphi(\det\mathcal{G})nH \end{aligned}$$

Also ist der (n-dimensionale) Flächeninhalt von f^ε gerade

$$\int_U \sqrt{\det\mathcal{G}^\varepsilon(u)}\,\mathrm{d}u$$

Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_0 \left(\int_U \sqrt{\det \mathcal{G}^\varepsilon(u)}\,\mathrm{d}u\right) = \int_U \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\big|_0 \det \mathcal{G}^\varepsilon(u)}{2\sqrt{\det \mathcal{G}(u)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_U \frac{-2n\varphi(u)H(u)\det \mathcal{G}(u)}{2\sqrt{\det \mathcal{G}(u)}}\,\mathrm{d}u = -n\int_U \varphi(u)H(u)\sqrt{\det \mathcal{G}(u)}\,\mathrm{d}u$$

Für jedes $\delta > 0$ gibt es eine C^∞-Funktion $\psi : \overline{U} \to \mathbb{R}$ (Abschneidefunktion) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\psi_{\partial U} = 0$, $0 \leqslant \psi(u) \leqslant 1$ $\forall u \in U$

(ii) $\psi(u) = 1$, falls $d(u, \partial U) > \delta$

Falls $H(u_0) \neq 0$ für ein $u_0 \in U$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für eine Abschneidefunktion ψ (zu δ) bei der Wahl $\varphi := H\psi$ (also $\varphi H = \psi H^2$, $H^2 \geqslant 0$!) die Variation des Flächeninhalts < 0 wird, im Widerspruch zur Minimalität von f.

Damit haben wir gezeigt:

min-19 **Satz 4.15** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, wo $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die sich auf $\overline{U}$ stetig fortsetzen lässt. Falls f unter allen solchen Hyperflächen mit derselben Einschränkung auf ∂U minimalen Flächeninhalt hat, dann ist f eine Minimalfläche, d.h. $H(u) = 0$ für alle $u \in U$.*

Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$

Erinnerung: Eine parametrisierte Hyerfläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ heißt **konform** parametrisiert, falls die Matrix $(g_{ij}(u))_{ij} = \lambda(u)E$ ist und damit f winkeltreu ist. Man nennt das auch eine **isotherme Parametrisierung**.

Satz 4.16 (Existenz von isothermen Parametrisierungen (Gauß/Kern/Lichtenstein)) Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^{r+1}-Hyperfläche ($r \geqslant 1$). Dann gibt es zu jedem Punkt $p_0 \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ und eine C^r-Parametertransformation $\varphi : \tilde{V} \to V$, so dass $f\big|_V \circ \varphi$ konform ist.

Beweis für f reell analytisch von Gauß (1822), 1911/14 obiges Resultat.

Achtung: Für höhere Dimensionen $n \geqslant 3$ gibt es *keinen* analogen Satz.

min-20 **Feststellung 4.17** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine konforme parametrisierte Hyperfläche mit $(g_{ij}(u)) = \lambda(u)E$. Dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} = 2\lambda HN.$$

Insbesondere ist f genau dann eine Minimalfläche, wenn die Komponentenfunktionen f_1, f_2, f_3 von f harmonisch sind, d.h. wenn $\Delta f_j := \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

Beweis. Es gilt

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt mit $\partial_{u_2} \langle f_{u_1}, f_{u_2} \rangle = 0$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \right\rangle$$

Also

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

Genauso folgt

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle = 0$$

$f_{u_1u_1} + f_{u_2u_2}$ ist also orthogonal zu $T_u f$, also ein Vielfaches von N:

$$\mathcal{G}(u)^{-1} = \frac{1}{\lambda(u)} E,$$

also gilt:

$$2H = \operatorname{tr} L = \frac{1}{\lambda}(h_{11} + h_{22}) = \frac{1}{\lambda}\left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \right\rangle$$

also folgt die Behauptung. ■

Ausflug: Funktionentheorie einer Variablen

Es gilt: Eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{C}$ offen) mit $\varphi(u + iv) = x(u,v) + iy(u,v)$ (wo u, v, x, y reell) ist analytisch (komplex differenzierter) genau dann, wenn $x, y \in C^1$ sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $x_u = y_v$, $y_u = -x_v$ gelten.
Wenn f in einer Umgebung von $w_0 \in U \subset \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist f in einer Umgebung von w_0 sogar in einer Potenzreihe entwickelbar (also insbesondere $\in C^\infty$).
Falls f analytisch ist, dann sind x und y harmonisch, also $x_{uu} + x_{vv} = 0 = y_{uu} + y_{vv}$.

min-21 **Feststellung 4.18 (Komplexifizierung)** *Für eine Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ definiere $\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{C}^3$ durch $\varphi(u + iv) = f_u(u,v) - if_v(u,v)$, $\tilde{U} := \{u + iv \mid (u,v) \in U\}$. Dann gilt*

(i) f ist konform genau dann, wenn $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ ($\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$).

(ii) Falls f konform ist, dann ist f eine Minimalfläche genau dann, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ analytisch sind (also holomorph).

(iii) Falls $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ analytisch sind mit $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ dann ist f genau dann regulär, wenn $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 = 0$.

Beweis. (i) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + i^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - 2i \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}\end{aligned}$$

Dies ist $= 0 \iff g_{11} = g_{22}$ und $g_{12} = 0$

(ii) Es gilt

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{Re} \varphi_k), \quad \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Im} \varphi_k)$$

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Re} \varphi_k) = -\frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Im} \varphi_k)$$

Die Gültigkeit der Gleichung $f_{uu} + f_{vv} = 0$ ist also äquivalent zur Gültigkeit der Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ($\partial_u \mathrm{Re}\, \varphi_k = \partial_v \mathrm{Im}\, \varphi_k$). Nach 4.20 ist dies äquivalent dazu, dass f eine Minimalfläche ist (falls f eine Hyperfläche).

(iii) Es gilt

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \geqslant 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f_u + f_v = 0$. Mit a) folgt c).

■

min-22 **Folgerung 4.19** Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende Gebiet und $\varphi_k : U \to \mathbb{C}$ ($k = 1,2,3$) holomoph mit $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ und $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 \neq 0$ (für alle $u \in U$). Dann ist die durch

$$f_k(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \varphi_k(\xi)\, \mathrm{d}\xi \quad (k = 1,2,3),$$

definierte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche.

Definition **Einfach zusammenhängend** heißt, U ist zusammenhängend und jeder geschlossene Weg $w : [0,1] \to U$ ist **nullhomotop**, d.h. es gibt $F : [0,1] \times [0,1] \to U$ stetig mit

$$\begin{aligned} F(s,0) &= w(s) \\ F(s,1) &= w(0) = w(1) \\ F(0,t) &= F(1,t) = w(0) = w(1) \end{aligned}$$

Definition f hat an der Stelle $z_0 \in U$ einen Pol, falls $f(z_0) = \infty$ und $\exists n \in \mathbb{N} : (z - z_0)^n f$ an der Stelle z_0 eine hebbare Singularität.

min-23 **Lemma 4.20** *Seien $F : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $G : U \to \mathbb{C} \vee \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion (d.h. die einzigen Singularitäten sind Pole), so dass FG^2 holomorph ist. Dann erfüllen*

$$\varphi_1 = \frac{F}{2}(1 - G^2),\ \varphi_2 = \frac{iF}{2}(1 + G^2),\ \varphi_3 = FG \qquad (*)$$

die Gleichung $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Umgekehrt erhält man aus holomorphen φ_i ($i = 1,2,3$) mit $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, wobei keines der φ_i identisch 0 ist, durch

$$F = \varphi_1 - i\varphi_2,\ G = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2},$$

solche Funktionen F, G aus denen mit $(*)$ φ_i zurückgewonnen werden können.

min-24 **Folgerung 4.21 (Weierstraß-Darstellung)** *Jede konforme parametrisierte Minimalfläche $f : U \to \mathbb{R}^3$, die keine Ebene ist, lässt sich lokal darstellen durch $f_k(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \varphi_k(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ mit $\varphi_1 = \frac{1}{2}F(1 - G^2)$, $\varphi_2 = \frac{i}{2}F(1 + G^2)$, $\varphi_3 = FG$, wobei F, G so sind, wie in Lemma 4.20.*
Umgekehrt definiert jedes Paar (F, G), F holomorph, U einfach zusammenhängend, G meromorph mit FG^2 holomorph eine Minimalfläche, die regulär ist, wenn F höchstens an den Polen von G verschwindet und dort $FG^2 \neq 0$ ist.

Beispiel Enneper-Fläche

$F(z) = 2$, $G(z) = z$. Dann

$$\varphi_1 = 1 - z^2,\ \varphi_2 = i(1+z^2),\ \varphi_3 = 2z,\ z = u + iv$$
$$\operatorname{Re}\int_0^z \varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{Re}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2$$
$$\operatorname{Re}\int_0^z \varphi_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{Re}\left(iz - i\frac{z^3}{3}\right) = -v - \frac{v^3}{3} - u^2 v$$
$$\operatorname{Re}\int_0^z \varphi_3(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{Re} z^2 = u^2 - v^2$$

Für die Wahl $F = 2z^2$, $G = z^{-1}$ ergibt sich $\varphi_1 = z^2 - 1$, $\varphi_2 = i(1+z^2)$, $\varphi_3 = 2z$. also wieder die Enneper-Fläche bis auf eine Spiegelung.

Die assoziierte Familie

Wenn man $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ mit $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ multipliziert erhalt man wieder eine Minimalfläche, die isometrisch zur ursprünglichen Minimalfläche ist, da $2g_{11} = 2g_{22} = g_{11} + g_{22} = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2$ sich dabei nicht verändern. Diese Familie von Minimalflächen heißt eine **assoziierte Familie**.
Die Minimalfläche zu $i\varphi$ heißt die zu φ **konzugierte Minimalfläche**.

Beispiel Katenoid und Wendelfläche sind zueinander assoziiert.

Einige Beispiele für Minimalflächen

(1) Das Katenoid: $f(u,v) := \Big(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u\Big)$
Drehfläche der Kettenlinie $\Big(\cosh u, u\Big)$

(2) Die Wendelfläche: $f(u,v) := \Big(v\cos u, -v \sin u, u\Big)$ (als Regelfläche, keine konforme Parametrisierung)
$\tilde{f}(u,v) := \Big(\sinh u \sin v, -\sinh u \cos v, v\Big)$ (konforme Parametrisierung)

(3) Die Enneper-Fläche: $f(u,v) := \Big(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v + \frac{1}{3}v^3 - vu^2, u^2 - v^2\Big)$

(4) Die Scherksche Minimalfläche $f(u,v) := \Big(u, v, \ln \frac{\cos v}{\cos u}\Big)$ (nicht konforme Parametrisierung), wo $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(5) Catalan-Fläche $f(u,v) := \Big(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}\Big)$

5 Die innere Geometrie von Hyperflächen

iGHyp

Zur Vereinfachung nutzen wir folgende

Notation: $f_{u_i} := \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$, $f_{u_i u_j} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$, $f_{u_i u_j u_k} := \dfrac{\partial^3 f}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}$ etc.

Weiterhin ist $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $u \in U$, $f \in C^2$.

Die partiellen Ableitungen der natürlichen Basis (zusammen N) $(f_{u_1}, ..., f_{u_n}, N)$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ sollen in dieser Basis ausgedrückt werden. Dafür

Definition (und Lemma) In den Gaußschen Ableitungsgleichungen

$$f_{u_i u_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k f_{u_k} + h_{ij} N$$

heißen die Γ_{ij}^k die **Christoffel-Symbole (2. Art)**. Den Normalenanteil von $f_{u_i u_j}$ hatten wir schon betrachtet, nämlich

$$h_{ij} = \left\langle N, f_{u_i u_j} \right\rangle = -\left\langle N_{u_i}, f_{u_j} \right\rangle,$$

wo $(h_{ij})_{i,j}$ die Matrix der 2. Fundamentalform bzgl. der natürlichen Basis und

$$N_{u_i} = -\sum_{k=1}^{n} h_i^k f_{u_k} = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g^{kj} h_{ji} f_{u_k},$$

da $\mathrm{DN}\big|_u = -L_u \circ \mathrm{Df}\big|_u$ und $(h_i^k(u))_{i,k}$ die Matrix von L_u bzgl. der natürlichen Basis ist. Aus der Definition folgt unmittelbar ($f_{u_i u_j} = f_{u_j u_i}$):

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}$$

Generalvoraussetzung Es sei $f \in C^3$.

Dann sind die 3. partiellen Ableitungen vertauschbar, also $f_{u_i u_j u_k} = f_{u_i u_k u_j}$. Daraus folgen die folgenden Gleichungen

iGHyp-01 **Satz 5.1 (und Definition)** *(a) Die Gauß-Gleichung. Für alle $i, j, k, s \in \{1, ..., n\}$ gilt:*

$$\begin{aligned} R_{ikj}^s &:= \frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s \right) \\ &= h_{ij} h_k^s - h_{ik} h_j^s \end{aligned}$$

!!! *R_{ikj}^s heißt der* **Riemannsche Krümmungstensor** *mit Index (i, s, k, j).*

(b) Die Codazzi-Mainardi-Gleichungen. Für alle $i, j, k \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} + \sum_{r=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^r h_{rk} - \Gamma_{ik}^r h_{rj} \right) = 0.$$

Beweis. Leite die Gaußsche Ableitungsgleichung ab und setze dann die Ableitungsgleichungen für $f_{u_i u_j u_k} - f_{u_i u_k u_j}$ ein.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u_k} f_{u_i u_j} - \frac{\partial}{\partial u_j} f_{u_i u_k} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ik}^s \right) f_{u_s} + \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{ij}^r f_{u_r u_k} - \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{ik}^r f_{u_r u_j} + \left(\frac{\partial}{\partial u_k} h_{ij} \right) N - \left(\frac{\partial}{\partial u_j} h_{ik} \right) N + h_{ij} N_{u_k} - h_{ik} N_{u_j} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ik}^s \right) f_{u_s} + \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{ij}^r \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma_{kr}^s f_{u_s} + h_{kr} N \right) - \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{ik}^r \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma_{jr}^s f_{u_s} + h_{jr} N \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial u_k} h_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} h_{ik} \right) N - h_{ij} \sum_{s=1}^{n} h_k^s f_{u_s} + h_{ik} \sum_{s=1}^{n} h_j^s f_{u_s} \end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\frac{\partial f}{\partial u_s}$ ist 0, also gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma^s_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma^s_{ik} + \sum_{r=1}^{n}\left(\Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{kr} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}\right) - (h_{ij}h^s_k - h_{ik}h^s_j)$$

Der Koeffizient von N ist 0, also (beachte: $h_{ij} = h_{ji}$)

$$0 = \sum_{r=1}^{n}\left(\Gamma^r_{ij}h_{kr} - \Gamma^r_{ik}h_{jr}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}h_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}h_{ik}$$

■

Wir wollen die Christoffel-Symbole mit Hilfe der g_{ij} und ihrer partiellen Ableitungen ausdrücken. Dafür

iGHyp-02 **Satz 5.2** *Es gilt*

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{s=1}^{n}\left\langle f_{u_iu_j}, f_{u_s}\right\rangle g^{sk}$$

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} g^{sk}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_j}\right)}$$

Beweis. Es gilt

$$\left\langle f_{u_iu_j}, f_{u_s}\right\rangle = \sum_{m\leqslant n}\Gamma^m_{ij}\left\langle f_{u_m}, f_{u_s}\right\rangle = \sum_{m\leqslant n}\Gamma^m_{ij}g_{ms}$$

Also

$$\sum_{s=1}^{n}\left\langle f_{u_iu_j}, f_{u_s}\right\rangle g^{sk} = \sum_{s\leqslant n}\sum_{m\leqslant n}\Gamma^m_{ij}g_{ms}g^{sk} = \sum_{m\leqslant n}\Gamma^m_{ij}\delta_{mk} = \Gamma^k_{ij}$$

Zyklisches Vertauschen von i, j, s ergibt (beachte: $g_{ij} = g_{ji}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} &= \frac{\partial}{\partial u_s}\left\langle f_{u_i}, f_{u_j}\right\rangle &&= \left\langle f_{u_iu_s}, f_{u_j}\right\rangle + \left\langle f_{u_i}, f_{u_ju_s}\right\rangle \\
\frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} &= \quad\cdots &&= \left\langle f_{u_ju_i}, f_{u_s}\right\rangle + \left\langle f_{u_j}, f_{u_su_i}\right\rangle \\
\frac{\partial g_{si}}{\partial u_j} &= \quad\cdots &&= \left\langle f_{u_su_j}, f_{u_i}\right\rangle + \left\langle f_{u_s}, f_{u_iu_j}\right\rangle
\end{aligned}$$

Also

$$\left\langle f_{u_iu_j}, f_{u_s}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i}\right)$$

■

Aus Satz 5.1 und 5.2 folgt:

iGHyp-03 **Satz 5.3 (Theorema Egregium (für $n = 2$ von C. F. Gauß))** *Die 2. elementarsymmetrische Krümmung $K_2(u_0)$ einer C^3-Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ hängt nur von $\mathcal{G}(u_0)$ und den einfachen und zweifachen partiellen Ableitungen von $\mathcal{G}$ an der Stelle u_0 ab, ist also eine Größe der inneren Geometrie. Für $n = 2$ ist $K_2 = K$ (Gaußkrümmung).*

Zum Beweis benötigen wir folgende Definition

Definition Betrachte die multilineare Abbildung $R : T_uf \times T_uf \times T_uf \to T_uf$. Dann heißt die Bilinearform auf T_uf

$$\mathrm{Ric}(Y, Z) := \mathrm{tr}(X \mapsto R(X, Y)Z)$$

Ricci-Tensor; die Spur der Matrix der linearen Abbildung:

$$\begin{array}{lcl} T_u f & \to & T_u f \\ X & \mapsto & R(X,Y)Z \end{array}$$

Wir würden gerne noch einmal etwas wie die Spur bilden. Das ist für Bilinearformen β im Allgemeinen nicht sinnvoll, aber man kann die Spur einer Bilinearform *bzgl.* eines Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilden

$$\operatorname{tr}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(\beta) := \sum_{i=1}^{n} \beta(u_i, u_i),$$

wobei $(u_1, ..., u_n)$ eine ONB bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der ONB, da $B = (\beta(u_i, u_j))_{i,j}$ und $\tilde{B} = S^T BS = S^{-1}BS$ dieselbe Spur haben ($S^t = S^{-1}$, da beide ONB sind und S Matrix des Basiswechsels). Bzgl. einer (beliebigen!) ONB $X_1, ..., X_n$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) ist die lineare Abbildung $X \mapsto R(X,Y)Z$ gleich $(\langle R(X_j,Y)Z, X_i\rangle)_{i,j}$, also

$$\operatorname{Ric}(Y,Z) = \sum_{i\leqslant n} \langle R(X_i,Y)Z, X_i\rangle .$$

und

$$s := \operatorname{tr}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \operatorname{Ric} = \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n} \langle R(X_i,X_j)X_j, X_i\rangle ,$$

s heißt die **Skalarkrümmung**. Sie hängt nicht von der Wahl der ONB $X_1, ..., X_n$ ab.

Beweis. Betrachte die multilineare Abbildung $R : T_u f \times T_u f \times T_u f \to T_u f$, die definiert ist durch

$$R(X,Y)Z := \operatorname{II}(Y,Z)LX - \operatorname{II}(X,Z)LY = \langle LY, Z\rangle\, LX - \langle LX, Z\rangle\, LY$$

Nach der Gaußgleichung (linke Seite) lässt sich R^s_{ikj} durch die Christoffel-Symbole und deren einfachen partiellen Ableitungen ausdrücken. Nach Satz 5.2 lassen sich die Christoffel-Symbole durch die 1. Fundamentalform und deren einfache partielle Ableitungen ausdrücken. Nach der Gaußgleichung (rechte Seite) ist $R^s_{ikj} = h_{ij}h^s_k - h_{ik}h^s_j$ also die s-te Komponente von $\operatorname{II}(f_{u_i}, f_{u_j})Lf_{u_k} - \operatorname{II}(f_{u_i}, f_{u_k})Lf_{u_j} = R(f_{u_k}, f_{u_j})f_{u_i}$. Damit ist die multilineare Abbildung R also durch $\mathcal{G}$ bestimmt und deren einfach und zweifachen partiellen Ableitungen bestimmt (da sie auf der Basis $f_{u_1}, ..., f_{u_n}$ bestimmt ist).

Wir wählen eine ONB aus HKR und erhalten

$$\begin{aligned} s = \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n} \langle R(X_i,X_j)X_j, X_i\rangle &= \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n} \Big\langle \underbrace{\Big\langle \underbrace{LX_j}_{k_jX_j}, X_j\Big\rangle}_{k_iX_i} \underbrace{LX_i}_{k_iX_i} - \underbrace{\Big\langle \underbrace{LX_i}_{k_iX_i}, X_j\Big\rangle}_{k_i\delta_{ij}} \underbrace{LX_j}_{k_jX_j}, X_j\Big\rangle \\ &= \sum_{i,j\leqslant n, i\neq j} k_j k_i = n(n-1)K_2 \end{aligned}$$

■

Der Hauptsatz der lokalen Flächentheorie

iGHyp-04 **Feststellung 5.4 (Eindeutigkeit)** *Seien $f, \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ zwei Hyperflächen, wobei U zusammenhängend sei, so dass $g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ij}(u)$, $h_{ij}(u) = \tilde{h}_{ij}(u)$ für alle $u \in U$, dann gibt es eine eigentliche Bewegung $B : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\tilde{f} = B \circ f$.*

Beweis. Für jedes $u \in U$ definiere eine lineare Abbildung $A(u) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$A(u)(f_{u_i}(u)) = \tilde{f}_{u_i}(u),$$
$$A(u)N(u) = \tilde{N}(u)$$

für alle $i = 1, ..., n$.
$A(u)$ bewahrt das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$, da $A(u)$ wegen $g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ij}(u)$ das Skalarprodukt zwischen je zwei Vektoren der Basis $(f_{u_1}, ..., f_{u_n}, N)$ bewahrt. $A(u) \in SO(n+1)$, da $(f_{u_1}, ..., f_{u_n}, N)$ und $(\tilde{f}_{u_1}, ..., \tilde{f}_{u_n}, \tilde{N})$ beide positiv orientiert sind. Zu zeigen A ist konstant:

$$\tilde{f}_{u_i u_j} = \frac{\partial}{\partial u_i}(A f_{u_j}) = A_{u_i}(f_{u_j}) + A(f_{u_j u_i})$$
$$\tilde{N}_{u_i} = (AN)_{u_i} = A_{u_i}\ N + A(N_{u_i}),$$

andererseits gilt $\tilde{g}^{ij} = g^{ij}$ und nach Satz 5.2 gilt $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$. Damit folgt aus den Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{u_i u_j} &= \sum_{k \leqslant n} \tilde{\Gamma}^k_{ij} \tilde{f}_{u_k} + \tilde{h}_{ij}\tilde{N} \\ &= \sum_{k \leqslant n} \Gamma^k_{ij} A f_{u_k} + h_{ij} AN \\ &= A\left(\sum_{k \leqslant n} \Gamma^k_{ij} f_{u_k} + h_{ij} N\right) = A f_{u_i u_j}\end{aligned}$$

Entsprechend für $\tilde{N}_{u_i} = A(N_{u_i})$. Daraus folgt $A_{u_i} = 0$ für alle i. Da alle partiellen Ableitungen konstant sind und U zusammenhängend, ist A konstant. Ferner $\tilde{f}_{u_i}(u) - A(f_{u_i}(u)) = 0$ für alle i, also $\tilde{f} - Af$ konstant (U zusammenhängend). ■

iGHyp-05

Satz 5.5 (Hauptsatz der lokalen Flächentheorie, O. Bonnet) *Seien auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ matrizenwertige Funktionen $(g_{ij})_{i,j} : U \to \mathbb{R}^{n,n}$, $(h_{ij})_{i,j} : U \to \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben, so dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

!!!

(1) $g_{ij} \in C^2$, $h_{ij} \in C^1$ für alle i, j
(2) $(g_{ij})_{i,j}$ und $(h_{ij})_{i,j}$ sind symmetrische Matrizen (d.h. $g_{ij} = g_{ji}$ und $h_{ij} = h_{ji}$ für alle i, j)
(3) $(g_{ij}(u))_{i,j}$ positiv definit für alle $u \in U$
(4) $(g_{ij})_{i,j}$ und $(h_{ij})_{i,j}$ erfüllen die Gauß- und Codazzi-Mainnardi-Gleichungen aus Satz 5.1, wobei die Γ^k_{ij} gemäß den Gleichungen aus Satz 5.2 definiert sind

Dann gibt es zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $u^{(0)} \in U$, $p^{(0)} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X^{(0)}_1, ..., X^{(0)}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\left\langle X^{(0)}_i, X^{(0)}_j \right\rangle = g_{ij}(u^{(0)})$ eine zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von $u^{(0)}$ auf der genau eine C^3-Hyperfläche $f : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ existiert mit $f(u^{(0)}) = p^{(0)}$, $f_{u_i}(u^{(0)}) = X^{(0)}_i$ für $i = 1, ..., n$. $(g_{ij})_{i,j}$ und $(h_{ij})_{i,j}$ sind die erste und zweite Fundamentalform von f.

Beweis. vgl. Bla ke-Leichtweiß: Elementare Differentialgeometrie (ausführlich) oder Kühnel: Differentialgeometrie (Beweisskizze).

Skizze des Beweisweges Betrachte dazu zunächst das System linearer partieller Differenti-

algleichungen für X_j, N

$$\frac{\partial X_j}{\partial u_i} = \sum_{k \leqslant n} \Gamma_{ij}^k X_k + h_{ij} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial u_i} = -\sum_{j,k \leqslant n} h_{ij} g^{jk} X_k$$

Suche z. B. Y als C^2-Funktion von x_1, x_2 mit

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = f(x_1, x_2), \ \frac{\partial Y}{\partial x_2} = g(x_1, x_2)$$

Dann existiert eine solche C^2-Funktion Y, wenn die folgende *Integrabilitätsbedingung* gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \left(\text{wegen } \frac{\partial Y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial Y}{\partial x_2 \partial x_1}\right).$$

Das Anfangswertproblem mit Anfangswerten $X_i(u^{(0)}) = x_i(0)$, $N(u^{(0)}) = N^{(0)}$, wobei $N^{(0)}$ der Einheitsvektoren senkrecht zu $X_1^{(0)}, ..., X_n^{(0)}$ ist, mit $\det\left(X_1^{(0)}, ..., X_n^{(0)}, N^{(0)}\right) > 0$ (positiv orientiert) ist, hat dann lokal eine eindeutige Lösung. Dies folgt aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungenssysteme, wobei die Integrabilitätsbedingungen die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi (aus Satz 5.1) eine entscheidende Voraussetzung für die Lösbarkeit sind.

Mit diesen X_i hat man das lineare partielle Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = X_i$$

mit Anfangswert $f(u^{(0)}) = p^{(0)}$ zu lösen. Hier sind die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j} = \frac{\partial X_j}{\partial u_i},$$

erfüllt, wegen der Symmetrien von $h_{ij} = h_{ji}$ und $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Schließlich muss man zeigen, dass das so definierte f die gewünschten Eigenschaften hat. Die Eindeutigkeit hatten wir in Proposition 5.4 gezeigt. ■

iGHyp-06 **Satz 5.6 (Falls $\operatorname{rg} L \geqslant 3$ ist, dann bestimmte die erste Fundamentalform schon die zweite, bis auf Vorzeichen)** *Seien $f, \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ zwei C^3-Hyperflächen mit der gleichen ersten Fundamentalform $(g_{ij}(u))_{i,j} = (\tilde{g}_{ij}(u))_{i,j}$ für alle $u \in U$. Sei $u \in U$ mit $\operatorname{rg} L_u \geqslant 3$ (damit $n \geqslant 3$), dann gilt $(h_{ij}(u))_{i,j} = \pm(\tilde{h}_{ij}(u))_{i,j}$.*

Definition Zwei Hyperflächen $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißen **isometrisch**, wenn es eine Parametertransformation $\Phi : U \to \tilde{U}$ gibt, so dass f und $\tilde{f} \circ \Phi$ die gleiche erste Fundamentalform haben.

Sie heißen **lokal isometrisch**, falls es für alle $u \in U$ eine Umgebung V von u gibt und ein $\tilde{u} \in \tilde{U}$ mit Umgebung $\tilde{V} \subset \tilde{U}$, so dass die Einschränkung $f|_V$ und $\tilde{f}|_{\tilde{V}}$ isometrisch sind.

iGHyp-07 **Satz 5.7 (Flächen mit gleicher konstanter Gaußkrümmung sind lokal isometrisch)** *Seien $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ C^3-Flächen mit gleicher* **konstanter** *Gaußkrümmung. Dann sind f und $\tilde{f}$ lokal isometrisch.*

iGHyp-08 **Satz 5.8** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche ($n \geqslant 2$), $f \in C^3$ und U zusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Jeder Punkt ist ein Nabelpunkt (d.h. $k_1(u) = ... = k_n(u)$)
(ii) $f(U)$ ist in einer Hyperebene oder einer n-Sphäre (= Kugeloberfläche) $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthalten

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i) $L = 0$ für eine Hyperebene und $L = \pm\frac{1}{r}\mathrm{id}$ für die Sphäre vom Radius r.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Aus $k_1(u) = ... = k_n(u)$ für alle $u \in U$ folgt, dass es ein $\lambda : U \to \mathbb{R}$ gibt mit $L_u = \lambda(u)\mathrm{id}$. Also $\mathrm{DN} = -\lambda \mathrm{Df}$, also $N_{u_i} = -\lambda f_{u_i}$. Partiell nach u_j abgeleitet: $N_{u_iu_j} = -\lambda f_{u_iu_j} - \lambda_{u_j} f_{u_i}$, also insbesondere

$$-\lambda f_{u_iu_j} - \lambda_{u_i} f_{u_j} = N_{u_ju_i} = N_{u_iu_j} = -\lambda f_{u_iu_j} - \lambda_{u_j} f_{u_i},$$

also $\lambda_{u_i} f_{u_j} = \lambda_{u_j} f_{u_i}$, also wegen der linearen Unabhängigkeit von f_{u_i}, f_{u_j} für $i \neq j$ folgt $\lambda_{u_i} = \lambda_{u_j} = 0$, also ist λ konstant (wegen U zusammenhängend).
Falls $\lambda = 0$, dann ist $\mathrm{DN} = 0$, also N konstant, also $f(U)$ in einer Hyperebene enthalten.
Falls $\lambda \neq 0$, dann ist $\mathrm{DN} + \lambda \mathrm{Df} = 0$, also $N + \lambda f = c$ konstant, also

$$1 = \langle N, N\rangle = \langle c - \lambda f, c - \lambda f\rangle = \|c - \lambda f\|,$$

also ist $f(U)$ in einer Sphäre mit Radius $\frac{1}{\lambda}$ und Mittelpunkt $\frac{c}{\lambda}$ enthalten.

■

6 Die kovariante Ableitung, Parallelverschiebung und Geodätische

Definition Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine n-Fläche ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n = 1$ zugelassen). Ein **Vektorfeld** Y **längs** f ist eine Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^m$. Es heißt **tangential**, falls $Y(u) \in \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$ für jedes $u \in U$.

Bezeichnung $\pi_u : \mathbb{R}^m \to \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$ bezeichne die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum (an der Stelle u)

Für Hyperfläche ($m = n + 1$) ist also $\pi_u(X) = X - \langle X, N(u)\rangle N(u)$.

Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ im Weiteren eine Hyperfläche

Definition (und Lemma) Seien $Y : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein tangentiales C^1-Vektorfeld längs f und $x \in \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$. Dann definiere die **kovariante Ableitung von Y in Richtung x (an der Stelle u)**

$$\nabla_x Y\big|_u := \pi_u\left(\mathrm{D}Y_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(x))\right) = \mathrm{D}Y_u\left(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}\right) - \left\langle \mathrm{D}Y_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(x)), N(u)\right\rangle N(u).$$

$\nabla_x Y\big|_u$ ist also der Tangentialanteil von $\mathrm{D}Y_u\left(\mathrm{D}f_u^{-1}(x)\right)$.
Falls $X \in C^{r-1}$, $Y \in C^r$ tangentiale Vektorfelder sind und $f \in C^r$, dann ist $\nabla_x Y$ (mit $u \mapsto \nabla_{X(u)} Y\big|_u$) ein tangentiales C^{r-1}-Vektorfeld langs f.

Bezeichnung Sei $\alpha : U \to \mathbb{R} \in C^1$. Dann bezeichne αY das tangentiale Vektorfeld mit

$$\alpha Y = \alpha \cdot Y(u) := \alpha(u) Y(u)$$

ap-01 **Satz 6.1 (Rechenregeln für ∇)** *Seien $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in C^1$, $X, Y, Z : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ tangentiale Vektorfelder längs f. Dann gilt:*

(i) $\nabla_{\alpha X+\beta Y} Z = \alpha \nabla_X Z + \beta \nabla_Y Z$ *(Linearität von* $\nabla_\bullet Z$*)*
(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ *(Additivität von* $\nabla_X(\cdot)$*)*
(iii) $\nabla_X(\alpha Y) = \alpha \nabla_X Y + \left(\mathrm{D}\alpha(\mathrm{D}f\big|^{-1}(X))\right) Y$ *(Produktregel für* $\nabla_X(\cdot)$*)*

Beweis. (i) + (ii) Klar (Einsetzen in $\nabla_X Y\big|_u = \pi_u\left(\mathrm{DY}_u(\mathrm{D}f|_u^{-1}(X))\right)$
(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_X(\alpha Y)\big|_u &= \pi_u\left(\mathrm{D}\alpha\big|_u(\mathrm{D}f|_u^{-1}(X))\right) Y(u) + \alpha(u)\mathrm{DY}\big|_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(X)) \\ &= \alpha(u)\nabla_X Y\big|_u + \mathrm{D}\alpha\big|_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(X))Y(u),\end{aligned}$$

da $\pi_u(Y(u)) = Y(u)$.

■

Sei $u \in U$ und $x \in \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$. Sei $\gamma : I \to U$ eine C^1-Kurve und $t_0 \in I$ mit $\gamma(t_0) = u$ und $(f\circ\gamma)^\bullet(t_0) = x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\nabla_X Y\big|_u &= \pi_u\Big(\mathrm{DY}_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1} \underbrace{(f\circ\gamma)^\bullet}_{\mathrm{D}f\big|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))} (t_0))\Big) \\ &= \pi_{\gamma(t_0)}\left(\mathrm{DY}_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\right) \\ &= \pi_{\gamma(t_0)}\left((Y\circ\gamma)^\bullet(t_0)\right)\end{aligned}$$

$\nabla_X Y\big|_u$ hängt also nur von $Y\circ\gamma$ ab. Daher ist folgende Definition mit der Definition von ∇ für tangentiale Vektorfelder längs f verträglich

Definition Für eine C^1-Kurve $c = f\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit f und ein an f tangentiales C^1-Vektorfeld $Y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ längs c ist die kovariante Ableitung (in Richtung $\dot c$) definiert durch

$$\nabla_{\dot c(t)} Y\big|_t := \pi_{\gamma(t)}(\dot Y(t))$$

Definition Falls $Y : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein tangentiales C^1-Vektorfeld längs f ist, dann heißt Y **parallel**, falls $\nabla_X Y\big|_u = 0$ für alle $u \in U$, $X \in \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n)$.
Falls $Y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein an f tangentiales C^1-Vektorfeld längs einer regulären Kurve $c = f\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ (auf f) ist, dann heißt Y **parallel längs** c, wenn $\nabla_{\dot c} Y \equiv 0$ ist, d.h. falls $\dot Y(t)$ und $N(\gamma(t))$ für alle $t \in I$ linear unabhängig sind.

apg-02 **Feststellung 6.2** *Seien* $X, Y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ *parallele an* f *tangentiale Vektorfelder längs* $c = f\circ\gamma$*. Dann ist* $\langle X, Y\rangle$ *konstant. Also sind auch* $\|X\|$, $\|Y\|$, $\sphericalangle(X,Y)$ *konstant.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle^\bullet &= \left\langle \dot X, Y\right\rangle + \left\langle X, \dot Y\right\rangle \\ &= \left\langle \pi_\gamma(\dot X), Y\right\rangle + \left\langle \pi_\gamma(\dot Y), X\right\rangle \quad \text{(wegen } X, Y \text{ tangential an } f\text{)} \\ &= \langle \nabla_{\dot c} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{\dot c}(Y)\rangle = 0,\end{aligned}$$

also $\langle X, Y\rangle$ konstant (insbesondere dann auch $\langle X, X\rangle$, $\sphericalangle(X,Y)$. ■

apg-03 **Feststellung 6.3** *Sei* $c = f\circ\gamma$ *eine nichtkonstante* C^2*-Kurve. Dann sind äquivalent*
(i) $\nabla_{\dot c}\dot c \equiv 0$
(ii) c *ist eine Geodätische und* $\|\dot c\|$ *ist konstant.*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Aus (i) folgt $\|\dot{c}\|$ konstant nach 6.2, also setze o.E. $\|\dot{c}\| = 1$ voraus. Dann ist

$$\ddot{c} = \dot{e}_1 = \kappa e_2 = (\kappa e_2)^{\text{Tang}} + \langle \kappa e_n, N\rangle N$$
$$(\kappa e_2)^{\text{Tang}} = \pi_\gamma(\ddot{c}) = \nabla_{\dot{c}}\dot{c},$$

also ist dann $\|\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\| = |\kappa_g|$ Betrag der geodätischen Krümmung. ■

Achtung In der Literatur werden Geodätische meist über $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} \equiv 0$ definiert, also $\|\dot{c}\|$ konstant mit gefordert.

Wir wollen die kovariante Ableitung in der natürlichen Basis des Tangentialraumes ausdrücken
Sei $Y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein an f tangentiales C^1-Vektorfeld längs $c = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$. Sei

$$Y(t) = \sum_{i\leqslant n} \eta_i(t) f_{u_i}(\gamma(t))$$

(Darstellung des Tangentialvektors in der natürlichen Basis). Dann ist

$$\dot{Y}(t) = \sum_{i\leqslant n} \dot{\eta}_i(t) f_{u_i}(\gamma(t)) + \sum_{i\leqslant n} \eta_i(t)(f_{u_i}\circ\gamma)^\bullet(t).$$

Mit $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ ist

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)^\bullet(t) &= \sum_{j\leqslant n} f_{u_i u_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)\\ &= \sum_{j\leqslant n}\left(\sum_{k\leqslant n}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) f_{u_k}(\gamma(t)) + h_{ij}(\gamma(t))N(\gamma(t))\right)\gamma_j(t),\end{aligned}$$

also (Normalenanteil fällt weg, Projektion!)

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y\big|_t = \sum_{i\leqslant n}\dot{\eta}_i(t) f_{u_i}(\gamma(t)) + \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n}\sum_{k\leqslant n}\eta_i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) f_{u_k}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t).$$

Umsortieren ergibt:

$$\boxed{\nabla_{\dot{c}(t)}Y\big|_t = \sum_{i\leqslant n}\left(\dot{\eta}_i(t) + \sum_{j\leqslant n}\sum_{k\leqslant n}\Gamma^i_{kj}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)\eta_k(t)\right) f_{u_i}(\gamma(t))} \qquad (*)$$ stern

Damit sieht man, dass $\nabla_{\dot{c}}Y\big|_t$ nur von der 1. Fundamentalform abhängt. D. h. genauer:

apg-04 **Folgerung 6.4** Seien $f, \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ zwei C^3-Hyperflächen mit derselben Matrix der 1. Fundamentalform für alle $u \in U$, $\gamma : I \to U$ eine C^1-Kurve, $Y(t) = \sum_{i\leqslant n}\eta_i(t) f_{u_i}(\gamma(t))$ und $\tilde{Y}(t) = \sum_{i\leqslant n}\eta_i(t)\tilde{f}_{u_i}(\gamma(t))$. Sei $c = f\circ\gamma$ und $\tilde{c} = \tilde{f}\circ\gamma$. Dann folgt

$$\left\langle \nabla_{\dot{c}(t)}Y(t), f_{u_i}(\gamma(t))\right\rangle = \left\langle \nabla_{\dot{\tilde{c}}(t)}\tilde{Y}(t), \tilde{f}_{u_i}(\gamma(t))\right\rangle$$

Beweis. Klar mit Satz 5.2 und $(*)$. ■

Sei Y ein tangentiales C^1-Vektorfeld längs f,

apg-05 **Lemma 6.5 (Invarianz von ∇ unter Umparametrisierungen)** *Sei $\varphi : V \to U$ eine Parametertransformation und $\tilde{f} = f\circ\varphi$, $\tilde{Y} = Y\circ\varphi$, $v \in V$, $u = \varphi(v)$, $X \in \mathrm{D}f_u(\mathbb{R}^n) = \mathrm{D}\tilde{f}_v(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\nabla_X\tilde{Y}\big|_v = \nabla_X Y\big|_u$.*

Beweis. Beachte $\tilde{N}(v) = \pm N(u)$. Ausrechnen gibt direkt

$$\begin{aligned}\nabla_X \tilde{Y}\big|_v &= \tilde{\pi}_v \left(\mathrm{D}(Y \circ \varphi)\big|_v (\mathrm{D}(f \circ \varphi)\big|_v^{-1}(X)) \right) \\ &= \pi_u \left(\mathrm{DY}\big|_u (\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(X)) \right) = \nabla_X Y\big|_u\end{aligned}$$

■

apg-14 **Satz 6.6 (Existenz paralleler Vektorfelder längs Kurven und Parallelverschiebung)** *Seien $c = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^1-Kurve auf der Hyperfläche f, $t_0 \in I$, $Y_0 \in \mathrm{D}f_{\gamma(t_0)}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau ein eindeutiges an f tangentiales Vektorfeld $Y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ längs c, dass parallel längs c ist, mit $Y(t_0) = Y_0$. Der Vektor $Y(t_1)$, $t_1 \in I$ heißt die* **Parallelverschiebung von Y_0 längs c an der Stelle t_1.**

Beweis. Wegen $(*)$ ergibt sich das gesuchte Vektorfeld aus Lösung des Anfangswertproblems des gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssytems für $\eta_1(t), ..., \eta_n(t)$ (wobei $Y(t) = \sum_{i \leqslant n} \eta_i(t) f_{u_i}(\gamma(t))$)

$$\dot{\eta}_i(t) + \sum_{j \leqslant n} \sum_{k \leqslant n} \Gamma^i_{kj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_j(t) \eta_k(t) = 0 \text{ für } i = 1, ..., n,$$

mit Anfangswert $\sum_{i \leqslant n} \eta_i(t_0) f_{u_i}(\gamma(t_0)) = Y_0$. Ein solches Anfangswertproblem besitzt eine eindeutige Lösung auf I. ■

Aus Proposition 6.2 folgt, dass bei gegebenem γ, t_0 und t_1, die Parallelverschiebung längs c eine lineare Isometrie von $\mathrm{D}f_{\gamma(t_0)}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathrm{D}f_{\gamma(t_0)}(\mathbb{R}^n)$ induziert, nämlich die Abbildung

$$Y_0 \mapsto \text{ Parallelverschiebung von } Y_0 \text{ längs } c \text{ an der Stelle } t_1.$$

Achtung Die Parallelverschiebung hängt zwar nicht von der Parametrisierung von $c = f \circ \gamma$ ab, aber im Allgemeinen von der Kurve.

min-15 **Bemerkung 6.7** Seien $f, \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ zwei Hyperflächen, die sich längs der Kurve $c = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ berühren, d.h. $c = f \circ \gamma = \tilde{f} \circ \gamma$ und $N \circ \gamma = \tilde{N} \circ \gamma$. Dann stimmt die Parallelverschiebung längs c für die beiden Hyperflächen überein.

Beweis. Die kovariante Ableitung $\nabla_{\dot{c}} Y\big|_t = \pi_{\gamma(t)}(\dot{Y}(t))$ stimmt für die beiden Hyperflächen überein. ■

Beispiel Sei c ein Breitenkreis auf der $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Betrachte den Kegel, der die S^2 in c (tangential) berührt. Den Kegel kann man in die Ebene abwickeln (isometrisch zur Abbildung)
In der Ebene ist die Parallelverschiebung die übliche, d.h. der Vektor ist konstant. Andererseits bleibt das Vektorfeld parallel, wenn es von der ebenen Menge auf den Kegel übertragen wird (vgl. Folgerung 5.12). Man sieht auch die Wegabhängigkeit.

Dieses Beispiel kann verallgemeinert werden

Beispiel Schmiegtorse Sei $\alpha = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert und $\dot{\alpha}$ sei für *kein* $t \in I$ eine Asymptotenrichtung. Betrachte die Regelfläche

$$F(t, v) = \alpha(t) + v \frac{N(\gamma(t)) \times (N \circ \gamma)^\bullet(t)}{\|(N \circ \gamma)^\bullet(t)\|}$$

Für diese gilt:

(1) Sie berührt f längs α (tangential) und ist in einer Umgebung von $v = 0$ regulär
(2) Sie ist eine Torse ($K \equiv 0$), also nach Satz über Torsen lokal isometrisch zur Ebene (abwickelbar)
(3) Sie ist die Einhüllende der Familie der (affinen) Tangentialebenen von f längs α

min-16 **Satz 6.8 (Existenz von Geodätischen)** *Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^3-Hyperfläche, $u_0 \in U$, $Y_0 \in \mathrm{D}f\big|_u(\mathbb{R}^n)$ und $\|Y_0\| = 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c = f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt mit $\gamma(0) = u_0$, $\gamma \in C^1$, $\dot{c}(0) = Y_0$.*

Beweis. Mit $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ ist

$$\dot{c}(t) = (f \circ \gamma)^\bullet(t) = \sum_{i \leqslant n} f_{u_i}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)$$

also in $(*)$ $\eta_i(t) = \dot{\gamma}_i(t)$ zu setzen ($\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$). Also

$$0 = \ddot{\gamma}_i(t) + \sum_{j \leqslant n}\sum_{k \leqslant n} \Gamma^i_{kj}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)\dot{\gamma}_k(t) \text{ für } i = 1, ..., n, \qquad (**)$$ doppelst

ein gewöhnliches **nichtlineares** Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$. Das Anfangswertproblem von $(**)$ mit $\gamma(0) = u_0$, $(f \circ \gamma)^\bullet(0) = Y_0$ ist nach Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen lokal eindeutig lösbar.
$(**)$ heißt **Differentialgleichung der Geodätischen**. ■

Beispiel (1) Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_{u_i}} f_{u_j} &= \pi_u\left(\mathrm{D}f_{u_j}\big|_u(\mathrm{D}f\big|_u^{-1}(f_{u_i}))\right) \\
&= \pi_u\left(\mathrm{D}f_{u_j}\big|_u(u_i)\right) \\
&= \pi_u\left(\mathrm{D}f_{u_j u_i}\big|_u\right) \\
&= \pi_u\left(\mathrm{D}f_{u_i u_j}\big|_u\right) \\
&= \nabla_{f_{u_j}} f_{u_i}\big|_u
\end{aligned}$$

(2) Achtung im Allgemeinen $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$.
Betrachte dazu $f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$ Ebene, $X(u_1, u_2) = (1, 0, 0)$ konstant, $Y(u_1, u_2) = (u_1, 0, 0)$. Dann ist

$$\nabla_X Y\big|_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{D}Y_0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{D}f\big|_0^{-1}(x)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

aber $\nabla_Y X\big|_0 = 0$, da X konstant!

Definition Seien X, Y tangentiale C^1-Vektorfelder längs f. Dann heißt

$$[X, Y] := \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

die **Lie-Klammer** von Y und Y.

Beispielsweise ist $\left[f_{u_i}, f_{u_j}\right] = 0$ nach Beispiel (1). Offensichtlich ist $[\cdot, \cdot]$ $\mathbb{R}$-bilinear und schiefsymmetrisch, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$.

min-17 **Satz 6.9 (und Definition, Variante der Integrabilitätsbedingungen)** *Seien X, Y, Z tangentiale C^2-Vektorfelder längs einer C^3-Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gelten die folgenden Gleichungen*

(a) Gauß-Gleichungen

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z &= \langle LY, Z\rangle\, LX - \langle LX, Z\rangle\, LY \\ &= \mathrm{II}(Y,Z)LX - \mathrm{II}(X,Z)LY \end{aligned}$$

$R(X,Y)Z$ heißt **Krümungstensor** *von f.*

(b) Gleichungen von Codazzi-Mainardi

$$\nabla_X(LY) - \nabla_Y(LX) - L([X,Y]) = 0$$

Beweis. Nachrechnen analog zu Satz 5.1 oder durch eine Koordinatendarstellung auf Satz 5.1 zurückführen. ■

min-18 **Folgerung 6.10** Der Wert von $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ an einer Stelle u hängt nur von den Werten der Vektorfelder X, Y, Z an der Stelle u ab (nicht von den Ableitungen, betrachte rechte Seite der Gaußgleichung) und nur von der **ersten** Fundamentalform von f in einer Umgebung von u ab (betrachte linke Seite der Gleichung).

Satz (über implizite Funktionen) *Falls $F : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geqslant m$, $F \in C^r$. Sei $a \in F(U)$ ein regulärer Wert, dann ist $F^{-1}(a)$ eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Definition Sei $F : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geqslant m$, $F \in C^1$. Ein Punkt $p \in U$ heißt **kritischer Punkt** von F, falls das Differential $\mathrm{DF}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht surjektiv ist.
Das Bild $F(p) \in \mathbb{R}^m$ eines kritischen Punktes heißt ein **kritischer Wert** von F, sonst **regulärer Wert**.

2 Differentialgeometrie II

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition Sei $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei M eine Menge. Ein **n-dimensionaler C^r-Atlas** $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ auf M ist eine Familie $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ (A Indexmenge) von Abbildungen $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha$, so dass für alle $\alpha \in A$:

(i) $\mathcal{O}_\alpha \subset M$ und $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha = M$,

(ii) φ_α bijektiv und $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \varnothing$ ist $\varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \to \varphi_\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \in C^r.$$

Sei $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas auf M. Dann heißt jedes φ_α eine **Karte**, φ_α^{-1} eine **Parametrisierung**, $U_\alpha = \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha)$ **Parameterbereich**, $\mathcal{O}_\alpha$ eine **Kartenumgebung**.

DiffMf-01 **Feststellung 1.1** *Sei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein n-dimensionaler C^r-Atlas auf M. Dann definiert*

$$\left\{\mathcal{O} \subset M \mid \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\right\}$$

eine Topologie auf M. Bezüglich dieser Topologie sind die φ_α Homöomorphismen (d.h. φ_α bijektiv, $\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^{-1}$ stetig).

Im Weiteren betrachten wir M als topologischen Raum mit dieser Topologie.

Definition (und Festellung) (a) Zwei n-dimensionale C^r-Atlanten auf M heißen **(C^r-)äquivalent**, wenn ihre Vereinigung wieder ein C^r-Atlas ist. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge der C^r-Atlanten auf M.

(b) Sei $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ n-dimensionaler C^r-Atlas auf M. Dann ist

$\{\varphi : \mathcal{O} \to U \mid \mathcal{O} \subset M$ offen, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, φ bijektive Abbildung, so dass

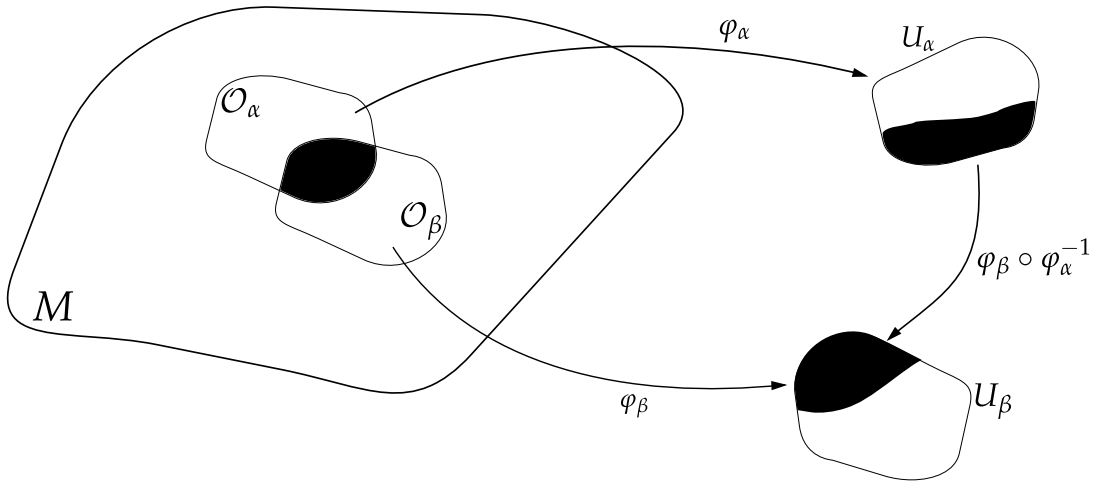
$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_\alpha) \to \varphi_\alpha(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$ ein C^r-Diffeomorphismus ist$\}$

ein C^r-Atlas, der $\mathcal{O}$ umfasst und damit zu $\mathcal{O}$ äquivalent ist.

Der eben konstruierte C^r-Atlas heißt der zu $\mathcal{O}$ äquivalente **maximale** (oder **vollständige**) **C^r-Atlas**. Offensichtlich der größte zu $\mathcal{O}$ äquivalente C^r-Atlas.

Definition Eine n-dimensionale **C^r-Mannigfaltigkeit** ist eine Menge M, zusammen mit einer Äquivalenzklasse von C^r-Atlanten (meistens $r = \infty$). Diese Äquivalenzklasse nennt man eine **differenzierbare Stuktur auf** M.

Definition C^0-Mannigfaltigkeit heißt auch **topologische Mannigfaltigkeit**,
C^∞-Mannigfaltigkeit heißen **differenzierbare Mannigfaltigkeit**,
n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit heißt **n-Mannigfaltigkeit**.



gf1

Generalvoraussetzung im Weiteren: Alle auftretenden Mannigfaltigkeiten sind Hausdorffräume (T_2-Räume), versehen mit einer abzählbaren Basis für die offenen Mengen (2. Abzählbarkeitsaxiom).

Beispiele für Mannigfaltigkeiten (1) Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-Mannigfaltigkeit, darstellbar mit einer Karte $\mathrm{id} : U \to U$ (**Standardstruktur**).

(2) $\mathbb{R}$ mit dem Atlas mit einziger Karte $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3$. Dies definiert eine andere differenzierbare Stuktur auf $\mathbb{R}$ als die Standardstruktur, denn $\mathrm{id} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar ($t = 0$).

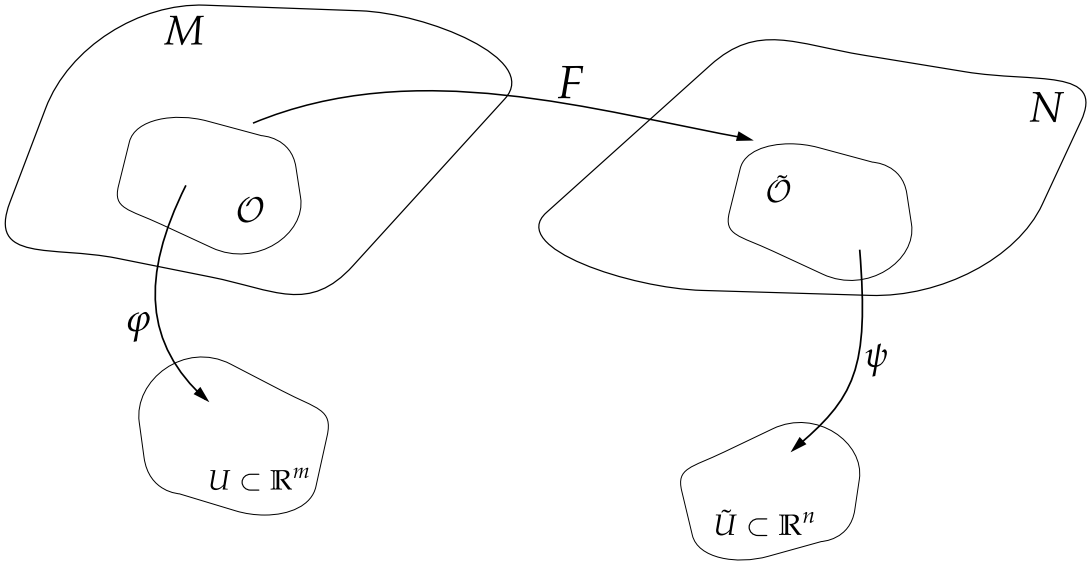
(3) Der (abstrakte) n-dimensionale Torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (Faktorgruppe bzgl. +). Also Kartenumgebungen von $[x] = [(x_1, ..., x_n)]$ (Äquivalenzklassen) kann man offenen Würfel $\omega_x := \left(x_1 - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(x_n - \frac{1}{2}, x_n + \frac{1}{2}\right)$ wählen, mit der Abbildung $\varphi_x : \omega_x \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_x(y) := y - x$. Die Kartenwechsel sind dann Translationen. Für den 2-dimensionalen Torus reichen die drei Karten mit Zentren $(0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Definition Sei M eine m-Mannigfaltigkeit, N eine n-Mannigfaltigkeit, $F : M \to N$ eine Abbildung. F heißt **differenzierbar** (geschrieben $F \in C^\infty$), falls für je zwei Karten (der maximalen Atlanten) $\varphi : \mathcal{O} \to U$ von M (also $U \subset \mathbb{R}^m$ offen) und $\psi : \tilde{\mathcal{O}} \to \tilde{U}$ von N (also $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen) mit $F(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{O}}$ die Komposition $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in C^∞ ist.

Definition F **Diffeomorphismus** $:\Longleftrightarrow F$ bijektiv, $F \in C^\infty, F^{-1} \in C^\infty$
Diffeomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mannigfaltigkeiten. Die Äquivalenzklassen heißen **Diffeomorphieklassen**.

Beispiel $\mathbb{R}$ mit der Standardstruktur und mit der Stuktur aus Beispiel (2) (Karte $\psi(t) = t^3$) sind diffeomorph. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = \sqrt[3]{t}$ definiert einen Diffeomorphismus, denn $\psi \circ F \circ \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$.

Einige (schwierige) Sätze über Diffeomorphieklassen der folgenden topologischen Mannigfaltigkeiten:
$\mathbb{R}^n$ $n \neq 4$ besitzt nur eine Diffeomorphieklasse (Stalleige 1962),
$n = 4$ überabzählbar viele Diffeomorphieklassen.



gf2

S^n (n-dimensionale Sphäre): $n \leqslant 6$ nur eine Diffeomorphieklasse (Milner 1956),
$n \geqslant 7$ verschiedene Diffeomorphieklassen,
$n = 31 \geqslant 16$ Mio. verschiedene Diffeomorphieklassen (exotische Sphäre).
Jede topologische n-Mannigfaltigkeit M mit $n \leqslant 3$ hat nur eine Diffeomorphieklasse.
Jede topologische Mannigfaltigkeit M mit $\dim M \leqslant 4$ besitzt (mindestens) eine differenzierbare Struktur.
Für $n = 8$ und für jedes $n \geqslant 10$ gibt es eine topologische Mannigfaltigkeit, n-Mannigfaltigkeit, die keine differenzierbare Struktur zulässt (non-smoothable manifold).

DiffMf-02 **Satz 1.2** *Jeder maximale C^r-Atlas, $r \geqslant 1$, enthält einen C^∞-Atlas (Whitney 1936, Beweis z. B. in Munkres: Elementar Differential Topology).*

Bemerkung zur Definition der differenzierbaren Abbildung. Wenn $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\left(\tilde{\mathcal{O}}_\beta, \psi_\beta\right)_{\beta \in B}$ Atlanten auf M bzw. N, dann ist $F : M \to N$ differenzierbar genau dann, wenn für alle $\alpha \in A, \beta \in B$ mit $\mathcal{O}_\alpha \cap F^{-1}\left[\tilde{\mathcal{O}}_\beta\right] \neq \varnothing$ gilt:

$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap F^{-1}\left[\tilde{\mathcal{O}}_\beta\right]) \to \tilde{U}_\beta$$

ist in C^∞.

Definition (stärkere Strukturen auf einer Mannigfaltigkeit) Eine Mannigfaltigkeit heißt **reell analytisch**, falls alle Kartenwechsel $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ reell analytisch sind, **mit konformer Struktur**, falls alle Kartenwechsel konform (winkeltreu), d.h. das Differential an jeder Stelle ein Vielfaches der Identität, **affin**, falls alle Kartenwechsel affine Abbildungen sind (z. B. : Torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ mit Atlas aus dem Beispiel), **orientiert**, falls alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind (d.h. positive Funktionaldeterminante an jeder Stelle).

2 Tangentialraum und Vektorfelder

Vereinbarung zur Notation Für eine Karte φ bezeichnen wir mit $(u^1, ..., u^n)$ die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$, mit $(x^1, ..., x^n)$ die Koordinatenstruktur in M genauer als Abbildung u^i Projektion des $\mathbb{R}^n$ auf die i-te Koordinate

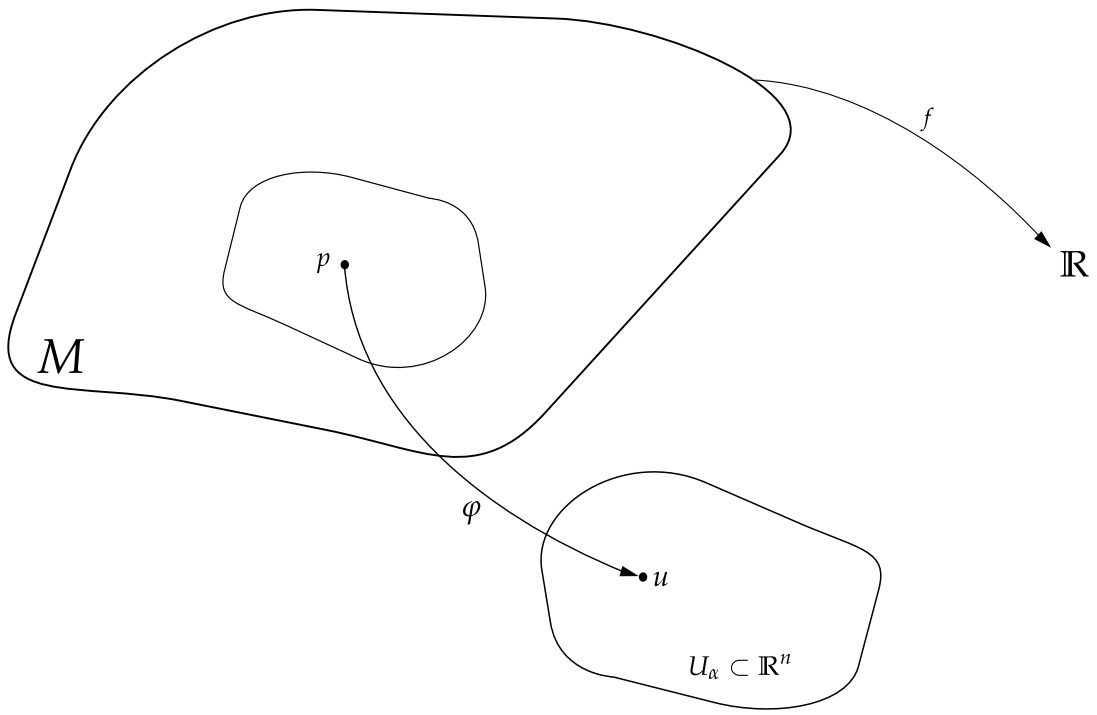
$$u^i(a^1, ..., a^n) = a^i$$

und

$$x^i(p) := u^i(\varphi(p)).$$

Andererseits fassen wir u^i, x^i als Variablen auf, nach denen partiell differenziert werden kann. Für eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ mit Standardstruktur) setze

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p := \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}\right|_{\varphi(p)}, \text{ wobei } p \in \mathcal{O}_\alpha, \varphi : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha \text{ Karte.}$$



gf3

Sei im Weiteren: M stets eine n-fache Mannigfaltigkeit (also n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, die Generalvoraussetzung erfüllt).

Definition und Bezeichnung Die **Menge offenen Umgebungen von** p sei

$$\mathcal{O}(p) := \{O \subset M \mid O \text{ offen}, p \in \mathcal{O}\}.$$

Die Menge der **Funktionskeime**

$$\mathcal{F}_p(M) := \{f : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \mid \mathcal{O} \in \mathcal{O}(p), f \text{ differenzierbar}\}/\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert ist durch

$$f \sim g : \exists \mathcal{O} \in \mathcal{O}(p) : \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2, \text{ wo } f\big|_{\mathcal{O}} = g\big|_{\mathcal{O}} \ (f, g : \mathcal{O}_{1/2} \to \mathbb{R}),$$

ist in natürlicher Weise eine Algebra (also $\mathbb{R}$-Vektorraum, Ring mit Eins) mit den Verknüp-

fungen (repräsentantenunabhängig!)

$$[f]\cdot[g]=[fg], \qquad \lambda[f]+\mu[g]=[\lambda f+\mu g].$$

Definition Eine **Derivation** auf $\mathcal{F}_p(M)$ ist eine Abbildung $X:\mathcal{F}_p(M)\to\mathbb{R}$, mit

(i) $\mathbb{R}$-Linearität (d.h. $X(\lambda f+\mu g)=\lambda X(f)+\mu X(g)$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R}, f,g\in\mathcal{F}_pM)$),

(ii) $X(fg)=X(f)g(p)+f(p)X(g)$ $(f,g\in\mathcal{F}_pM)$.

Definition $T_p(M):=\left\{X:\mathcal{F}_p(M)\to\mathbb{R}\mid X \text{ Derivation}\right\}$ heißt der **Tangentialraum von** M **in** p. Die Elemente von T_pM heißen **Tangentialvektoren**, $X(f)$ nennt man auch **Richtungsableitungen** von f in Richtung X.

TMVfer-01 **Feststellung 2.1** *$T_p(M)$ ist in natürlicher Weise ein ($\mathbb{R}$-)Vektorraum. Seien $X,Y\in T_pM$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Dann ist $\lambda X+\mu Y$ definiert durch $(\lambda X+\mu Y)(f)=\lambda X(f)+\mu Y(f)$.*

Beweis. $\lambda X+\mu Y$ linear, klar.

$$\begin{aligned}(\lambda X+\mu Y)(fg)&=\lambda X(fg)+\mu Y(fg)\\&=\lambda\left(X(f)g(p)+f(p)X(f)\right)+\mu\left(Y(f)g(p)+f(p)Y(g)\right)\\&=g(p)(\lambda X+\mu Y)(f)+f(p)(\lambda X+\mu Y)(g)\end{aligned}$$

Damit $\lambda X+\mu Y\in T_pM$. ■

Beispiel Sei $\varphi:\mathcal{O}\to U$ eine Karte von $M, p\in\mathcal{O}, (x^1,\dots,x^n)$ die Koordinatenabbildung der Parametrisierung φ^{-1},

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p=\left.\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial u^i}\right|_{\varphi(p)}. \text{ Man schreibt } \partial_i\big|_p(f).$$

Achtung: Definition hängt von der Karte φ ab.
Interpretation: Ableitung von f der i-ten Parameterlinie von φ^{-1}.

TMVfer-02 **Feststellung 2.2** $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\in T_pM$.

Beweis. Die partiellen Ableitungen von $f\circ\varphi^{-1}$ an der Stelle p sind linear und erfüllen die Produktregel und sind offensichtlich repräsentantenunabhängig.
Beachte: $\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(g\circ\varphi^{-1}\right)=(fg)\circ\varphi^{-1}$. ■

TMVfer-03 **Feststellung 2.3** *Für $X\in T_pM$ und $f\in\mathcal{F}_pM$ konstant $\Longrightarrow X(p)=0$*

Beweis. Sei zunächst $f=1$. Dann folgt $X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)1+1\cdot X(1)=2X(1)$, also $X(1)=0$.
Damit $X(c)=X(c\cdot 1)=cX(1)=0$. ■

TMVfer-04 **Satz 2.4** *Sei $\varphi:U\to V$ eine Karte mit den Koordinaten $x^1,\dots,x^n$, $p\in U$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ eine Basis von T_pM, genannt die* **natürliche Basis von** *T_pM bzgl. φ. Dabei gilt für jedes $X\in T_pM$:*

$$X=\sum_{i=1}^n X(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\varphi(p) = 0$.
Für ein beliebiges Element aus $\mathcal{F}_pM$ wähle einen Repräsentanten $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}, f \in C^\infty, \tilde{U} \subset U$ mit $p \in \tilde{U}$, so dass $\varphi(\tilde{U}) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel mit Mittelpunkt $\varphi(p) = 0$ ist. Definiere $h := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} h(u) &= h(0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(tu)\mathrm{d}t \\ &= h(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial u^i}(tu)u^i \mathrm{d}t \\ &= h(0) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u^i}(tu)\mathrm{d}t}_{=:h_i(u)} \end{aligned}$$

mit $h_i : \varphi(\tilde{U}) \to \mathbb{R} \in C^\infty$. Also ist:

$$h(u) = h(0) + \sum_{i \leqslant n} h_i u^i$$

Wegen $f = h \circ \varphi, x^i = u^i \circ \varphi$ mit $f_i := h_i \circ \varphi$ ist $f = f(p) + \sum f_i x^i$ auf $\tilde{U}$. Damit $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = f_i(p)$.
Für $X \in T_pM$ folgt

$$\begin{aligned} X(f) &= X\left(f(p) + \sum f_i x^i\right) \\ &= \sum \left(\underbrace{X(f_i)x^i(p)}_{=0 \text{ Vor.}} + f_i(p)X(x^i) \right) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p X(x^i) \\ &= \left(\sum X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right)(f), \end{aligned}$$

also $X = \sum X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ Erzeugendensystem von T_pM.

Lineare Unabhängigkeit: Sei $0 = \sum \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ und $\lambda^i \in \mathbb{R}$. Setze $x^i = u^i \circ \varphi$ ein:

$$0 = \sum \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\Big|_p = \lambda^j,$$

da $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_{ij}$. Da j beliebig, folgt $\lambda^1 = ... = \lambda^n = 0$. ■

MVfer-05 **Lemma 2.5** *(Transformationverhalten bei Kartenwechsel) Seien φ, ψ Karten in einer Umgebung von p. Seien $x^1, ..., x^n$ mit $x^i := u^i \circ \varphi$ bzw. $y^1, ..., y^n$ mit $y^i := u^i \circ \psi$ die Koordinaten in M bzgl. φ bzw. ψ. Sei $X \in T_pM$. Dann nach Satz 2.4*

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n X_p(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p .$$

Die Transformationsregel ist

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,$$

also $X_p(x^i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_p X_p(y^j)$ *mit*

$$\begin{pmatrix} X_p(u^1 \circ \varphi) \\ \vdots \\ X_p(u^n \circ \varphi) \end{pmatrix} = \mathrm{D}\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\Big|_{\psi(p)} \begin{pmatrix} X_p(u^1 \circ \psi) \\ \vdots \\ X_p(u^n \circ \psi) \end{pmatrix},$$

d.h. die Jacobimatrix des Kartenwechsels ist gleich der Basiswechsels der natürlichen Basis des T_pM *bzgl. der beiden Karten (von* $(\partial/\partial y^i\big|_p)_{i=1,\dots,n}$ *bzgl.* ψ *nach* $(\partial/\partial x^i\big|_p)_{i=1,\dots,n}$ *bzgl.* φ*).*

Beweis. $\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p (f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \underbrace{(x^i)}_{=u^i\circ\varphi} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\left(u^i \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right)}{\partial u^j}\Big|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f)$ ■

Definition $\mathrm{TM} := \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM$ heißt das **Tangentialbündel** von M, mit **Totalraum** TM, **Basisraum** M und **Bündelprojektion** $\pi : \mathrm{TM} \to M : \pi(X) = p$, falls $X \in T_pM$. $\pi^{-1}(M) = T_pM$ heißt **Faser des Bündels** über $p \in M$.
Genauer: Das Tangentialbündel ist das Tripel (TM, M, π).

TMVfer-06 **Feststellung 2.6 (und Definition)** TM *ist eine (2n)-Mannigfaltigkeit (*$n := \dim M$*) und* π *eine differenzierbare Abbildung mit dem Atlas* $(\tilde{\varphi}_\alpha)_{\alpha\in A}$ *auf* TM*, wobei* $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ein Atlas von* M *sei und* $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \to \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) \times \mathbb{R}^n$*, die* **Bündelkarte***, definiert ist durch*

$$\tilde{\varphi}_\alpha(X_p) := \left(\varphi_\alpha(p), \left(X_p(u^i \circ \varphi_\alpha)\right)_{i=1,\dots,n}\right),$$

wobei die 2. Komponente von X_p *der Koordinatenvektor der natürlichen Basis von* T_pM *bzgl. der Karte* φ_α *für* $X_p \in T_pM, p \in \mathcal{O}_\alpha$*.*
Zudem ist $\tilde{\varphi}_\alpha$ *bijektiv (Satz 2.4) und* $\varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ *offen.*

Beweis. $\tilde{\varphi}_\alpha(\pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \cap \pi^{-1}(\mathcal{O}_\beta) = \tilde{\varphi}_\alpha\left(\pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)\right)$ offen in $\mathbb{R}^{2n}$, Klar. Die Differenzierbarkeit des Kartenwechsels (C^∞) folgt mit Lemma 2.5 (Jacobimatrix des Kartenwechsels ist in C^∞). Dass TM ein Hausdorffraum ist, überträgt sich von M.
Abzählbare Basis der Topologie: Da die Topologie auf M eine abzählbare Basis besitzt, gibt es einen abzählbaren Atlas auf M. Wähle zu jeder Basismenge einen Karte φ_α des vollständigen Atlanten aus, die die Basismenge als Definitionsbereich hat ($\alpha \in A$, A abzählbar). $\left\{\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}_\alpha\right\}$ ist die gesuchte Basis. $\mathcal{B}_\alpha$ ist die abzählbare Basis der Topologie auf $B \times \mathbb{R}^n$. ■

Bemerkung und Definition Allgemeiner definiert man ein **Vektorraumbündel** über eine(n) $\begin{cases}\text{differenzierbare Mannigfaltigkeit}\\ \text{topologischer Raum}\end{cases}$ als (E, π, M) mit

$E = \begin{cases}\text{differenzierbare Mannigfaltigkeit}\\ \text{topologischer Raum}\end{cases}$, $\pi : E \to M \begin{cases}\text{differenzierbar, surjektiv}\\ \text{stetig, surjektiv}\end{cases}$,

$\pi^{-1}(p) := E_p$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum (für ein festes k) und es gilt *lokale Trivialität*: Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p und einen $\begin{cases}\text{Diffeomorphismus}\\ \text{Homöomorphismus}\end{cases}$ $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, so dass $\forall q \in M : \psi\left(\pi^{-1}\{q\}\right) = \{q\} \times \mathbb{R}^k$.

Definition Ein **differenzierbares Vektorfeld** auf M (kurz: **Vektorfeld**) ist eine differenzierbare Abbildung $X : M \to \mathrm{TM}$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, d.h. für alle $p \in M$ gilt: $X(p) \in T_pM$.
Auch genannt: **differenzierbarer Schnitt in das Tangentialbündel**.
Notation: X_p für $X(p)$.

Definition und Bezeichnung $\mathcal{F}(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$, mit den natürlichen Operationen $+$ und $\cdot$, ist ein kommutativer Ring mit Eins.
$\mathcal{X}(M)$ ist der **Raum der differenzierbaren Vektorfelder auf** M, betrachtet als $\mathcal{F}(M)$-Modul auf M mit den Operationen

$$(fX)_p := f(p)X_p, \qquad (X+Y)_p := X_p + Y_p.$$

Für $X \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{F}(M)$ bezeichne Xf die Funktion $(Xf)(p) := X_p(f)$ (genauer: $X_p[f]$). Also ist $Xf \in \mathcal{F}(M)$ wegen der Differenzierbarkeit von X.

MVfer-07 **Satz 2.7** *Sei $X : M \to \mathrm{TM}$ eine Abbildung mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dann gilt:*

$$X \in \mathcal{X}(M) \iff \forall f \in \mathcal{F}(M) : Xf \in \mathcal{F}(M)$$

Umgekehrt kann man jede Abbildung $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, die $\mathbb{R}$-linear und derivativ ist als Vektorfeld aufgefasst werden (insbesondere differenzierbar!).

Beweis. Übung. ■

Definition X **derivativ** $:\iff X(fg) = f(Xg) + g(Xf)$

Bemerkung Der $\mathcal{F}(M)$-Modul $\mathcal{X}(M)$ braucht keine Basis zu besitzen, d.h. er ist nicht immer frei. TM braucht nicht *trivial* zu sein, d.h. TM braucht nicht diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^n$ zu sein. TM ist trivial, wenn es n Vektorfelder $X_1, ..., X_n$ gibt, so dass $\left(X_{1,p}, ..., X_{n,p}\right)$ für jedes $p \in M$ eine Basis von T_pM ist. M heißt dann **parallelisierbar**.
Z. B. : S^1, S^3, S^7 sind parallelisierbar, d.h. $\mathrm{T}S^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}, \mathrm{T}S^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3, \mathrm{T}S^7 \cong S^7 \times \mathbb{R}^7$. Für n gerade ist $\mathrm{T}S^n$ *nicht* trivial, denn jedes Vektorfeld X auf S^n (n gerade) hat (mindestens) eine Nullstelle (für $n = 2$ *Nicht-Kämmbarkeit des Igels*).

Definition (und Proposition) Seien M eine n-Mannigfaltigkeit und $\tilde{M}$ eine m-Mannigfaltigkeit. Dann definiere die $(n+m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \times \tilde{M}$, das **Produkt** der Mannigfaltigkeiten M und $\tilde{M}$, durch $\varphi_\alpha \times \tilde{\varphi}_\beta : \mathcal{O}_\alpha \times \tilde{\mathcal{O}}_\beta \to U_\alpha \times \tilde{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, wobei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(\tilde{\mathcal{O}}_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in B}$ Atlanten von M bzw. $\tilde{M}$ sind.
Mit dieser Definition wird $M \times \tilde{M}$ eine $(n+m)$-Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\left\{\varphi_\alpha \times \tilde{\varphi}_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\right\}$ und die Projektionen $p : M \times \tilde{M} \to M, \tilde{p} : M \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ sind differenzierbar.

Bemerkung (1) $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_1(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) & , x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0 \end{cases} \in C^\infty$.

(2) $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_2(x) := h_1(x+b)h_1(-a-x)$. Dann ist $h_2(x) > 0$ für $-b < x < -a$, $h_2(x) = 0$ sonst.

(3) $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_3(x) := \dfrac{\int_{-b}^{x} h_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-b}^{-a} h_2(t)\,\mathrm{d}t} \in C^\infty$.

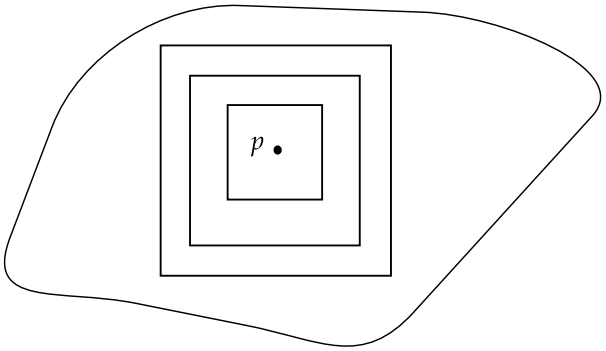
(4) $h_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_4(x) := h_3(x)h_3(-x) \in C^\infty$. Dann $h_4(x) = 0$ für $|x| \geqslant b, h_4 \geqslant 0, h_4(x) = 1$ für $(|x| \leqslant a)$.

TMVfer-08 **Lemma 2.8** *(a) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$. Dann gibt es $V \subset U$ offen mit $p \in V$ und $h : \mathbb{R}^n \to R$ mit $h(x) = 1$ für $x \in V$, $h(x) = 0$ für $x \notin U$, $h \in C^\infty, 0 \leqslant h \leqslant 1$.*

(b) Sei M eine n-Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $f : U \to \mathbb{R} \in C^\infty, p \in U$. Dann es gibt $V \subset U$ offen mit $p \in V$ und $g : M \to \mathbb{R}$ mit $g\big|_V = f\big|_V$, $g(x) = 0$ für $x \notin U, g \in C^\infty$.

(c) T_pM und $\hat{T}_pM := \{X : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R} \mid X$ Derivation bzgl. $p\}$ sind in natürlicher Weise isomorph. Insbesondere gibt es $f, g \in \mathcal{F}(M), X \in \hat{T}_pM$, so dass aus $f\big|_U = g\big|_U$ für eine Umgebung von p folgt $X(f) = X(g)$.

Definition $X : \mathcal{F}_p(M) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation bzgl.** $p :\Longleftrightarrow X$ $\mathbb{R}$-linear, $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$



gf4

Beweis von Lemma 2.8. (a) Sei $p = (p^1, ..., p^n)$. Wähle $a > 0$ mit

$$\left[p^1 - 2a, p^1 + 2a\right] \times \cdots \times \left[p^n - 2a, p^n + 2a\right] \subset U.$$

Definiere h_4 wie gehabt (mit $b = 2a$):

$$h\left(x^1, ..., x^n\right) := \prod_{i=1}^{n} h_4\left(x^i - p^i\right)$$

und $V = \left[p^1 - b, p^1 + b\right] \times \cdots \times \left[p^n - b, p^n + b\right]$.

(b) Wähle die Karte $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha, p \in \mathcal{O}_\alpha$. Definiere h wie in (a) mit $U_\alpha \cap \varphi_\alpha(U)$ anstelle von U und $\varphi_\alpha(p)$ anstelle p und $\tilde{V} \subset U_\alpha \cap \varphi_\alpha(U)$ anstelle von V. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} f(x) \cdot (h \circ \varphi_\alpha)(x) & x \in \mathcal{O}_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann hat g die gewünschten Eigenschaften mit $V := \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{V})$.

(c) Einerseits existiert zu jedem $f \in \mathcal{F}(M)$ ein Repräsentant $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(M)$, d.h. $f = [\tilde{f}]$. Nach (b) gibt es für U Umgebung von p eine Funktion $h \in \tilde{\mathcal{F}}(M)$ mit $h\big|_V = 1$ (V Umgebung von p). $h(x) = 0$ für $x \notin U$. Also für $f, g \in \mathcal{F}(M)$ mit $f\big|_U = g\big|_U, X \in \hat{T}_pM$ gilt $(f - g)h = 0$, also

$$0 = X((f-g)h) = X(f-g)\underbrace{h(p)}_{=1} + \underbrace{(f-g)(p)}_{=0}X(h) = X(f) - X(g),$$

also $X(f) = X(g)$.

■

Definition Die **Lie-Klammer** von Vektorfeldern $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist definiert durch

$$[X,Y](f) := X(Yf) - Y(Xf) = XYf - YXf$$

für alle $f \in \mathcal{F}(M)$.

MVfer-09 **Lemma 2.9** $[X,Y]$ *ist ein Vekorfeld.*

Beweis. $[X,Y]f \in \mathcal{F}(M)$, Klar.
Zu zeigen: $[X,Y]_p \in \tilde{T}_pM$ (verwende Aufgabe 3, Übungsblatt 2):
$[X,Y](af+bg) = a[X,Y]f + b[X,Y]g$ Klar, $\mathbb{R}$-linear von X, Y für $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\
&= fXYg + (Yg)(Xf) + gXYf + (Yf)(Xg) - (fXYg + (Xg)(Yf) + gXYf \\
&\quad + (Xf)(Yg)) \\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f
\end{aligned}$$

Also $[X,Y] \in \mathcal{X}(M)$ Vektorfeld ($[X,Y]_p \in \tilde{T}_pM$). ■

MVfer-10 **Feststellung 2.10** *(Rechenregeln)* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(M)$ *gilt:*

(1) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ *($\mathbb{R}$-Bilinearität)*
(2) $[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$ *($\mathbb{R}$-Bilinearität)*
(3) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(Schiefsymmetrie)*
(4) $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*
(5) $[X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$
(6) $[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X$

Beweis. (1), (3) Klar. (2) folgt aus (1) und (3). (4)-(6) Übung. ■

Definition Eine (reelle) **Lie-Algebra** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, die die Eigenschaften (1) - (4) erfüllt.

Sei $\varphi : \mathcal{O} \to \tilde{U}$ eine Karte von M. Bezeichne $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ das i-te Basisfeld bzgl. φ auf $\mathcal{O}$, also $\partial_i f := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)(f\circ\varphi^{-1})}$, damit $\partial_j(\partial_i f) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\left(f\circ\varphi^{-1}\right) = \partial_i(\partial_j f)$. Also

(7) $\left[\partial_i, \partial_j\right] = 0$

Jedes Vektorfeld X auf $\mathcal{O}$ lässt sich nach Satz 2.4 darstellen als $X = \sum_{i=1}^n f^i\partial_i$. Sei $Y = \sum_{i=1}^n g^i\partial_i$, dann ist nach Festellung 2.10: $\left[f\partial_i, g\partial_j\right] = f\left[\partial_i, g\partial_j\right] - g(\partial_j f)\partial_i = fg\left[\partial_i,\partial_j\right] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_i f)\partial_j$. Also $[X,Y] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(f^i(\partial_i g^j)\partial_j - g^j(\partial_j f^i)\partial_i\right)$,

(8) $[X,Y] = \sum_{i\leqslant n}\sum_{j\leqslant n}\left(f^j(\partial_j g^i) - g^j(\partial_j f^i)\right)\partial_i$ *(Koordinatendarstellung der Lie-Klammer)*

TMVfer-11 **Feststellung 2.11 (und Definition)** *Sei $F : M \to N \in C^\infty$. Dann definieren wir:* $\mathrm{DF} : \mathrm{TM} \to \mathrm{TN}$ *wie folgt*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{TM} \arrow[r, "\mathrm{DF}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{TN} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \end{tikzcd}$$

d.h. $\tilde{\pi} \circ \mathrm{DF} = F \circ \pi$ *durch* $\mathrm{DF}(X_p)(f) := X_p(f \circ F)$ *für jedes* $X \in T_pM, f \in \mathcal{F}_{F(p)}N$.

Beweis. zu zeigen: $\mathrm{DF}(X_p) \in T_{F(p)}N$, d.h. $X_p((\lambda f + \mu g) \circ F) = \lambda X_p(f \circ F) + \mu X_p(g \circ F)$ und $X_p((fg) \circ F) = g(F(p))X_p(f \circ F) + f(F(p))X_p(g \circ F)$ für alle $f, g \in \mathcal{F}_{F(p)}N$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dies ist aber klar, da $X_p \in T_pM$ und $(fg) \circ F = (f \circ F)(f \circ g)$. ■

Bezeichnung Einschränkung von DF auf die Faser $\mathcal{F}_pM = \pi^{-1}(p)$ wird mit

$$\mathrm{DF}\Big|_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

bezeichnet.

TMVfer-12 **Feststellung 2.12** *(Kettenregel) Seien $F : M \to N$, $G : N \to Q$ differenzierbare Abbildungen zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N und Q. Dann ist $G \circ F$ eine differenzierbare Abbildung und es gilt:*

$$\mathrm{D}(\mathrm{G} \circ \mathrm{F}) = \mathrm{DG} \circ \mathrm{DF} \qquad \textit{(Kettenregel)}$$

Also punktweise $\mathrm{D}(\mathrm{G} \circ \mathrm{F})\big|_p = \mathrm{DG}\big|_{F(p)} \circ \mathrm{DF}\big|_p$.

Beweis. Nach Definition gilt für jedes $X \in T_pM$ und $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{GF}(p)}(N)$ (bzw. $X \in \mathrm{TM}, f \in \mathcal{F}(N)$):

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(X)(f) &= X(f \circ \mathrm{G} \circ \mathrm{F}) \\ &= \mathrm{DF}(X)(f \circ G) \\ &= \mathrm{DG}(\mathrm{DF}(X))(f) \\ &= (\mathrm{DG} \circ \mathrm{DF})(X)(f) \end{aligned}$$

■

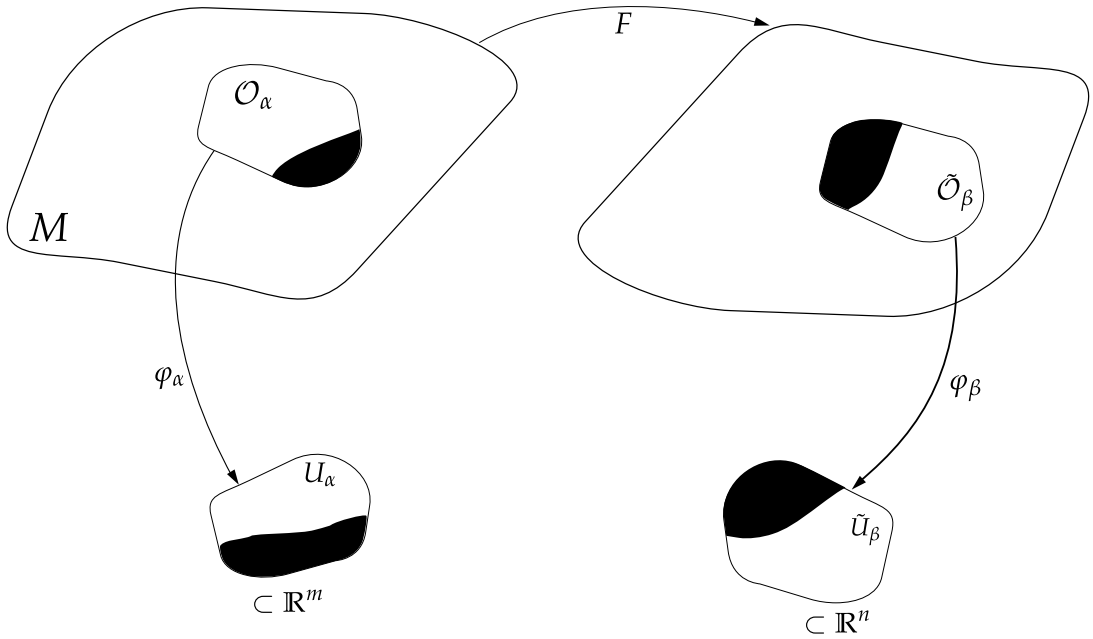
Definition Sei M eine m-Mannigfaltigkeit und N eine n-Mannigfaltigkeit. $F : M \to N$ differenzierbar. Falls für alle $\varphi_\alpha : M \supset \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ Karten von M, $\psi_\beta : N \supset \tilde{\mathcal{O}}_\beta \to \tilde{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ Karten von N und alle $p \in \mathcal{O}_\alpha \cap F^{-1}(\mathcal{O}_\beta)$ gilt:

Falls $\mathrm{D}\left(\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)\big|_{\varphi_\alpha(p)} \begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \end{cases}$ ist, dann heißt F eine $\begin{cases} \textbf{Immersion}, \\ \textbf{Submersion}. \end{cases}$

Falls F eine Immersion ist und $F\big| : M \to F(M)$ ein Homöomorphismus ist, dann heißt F eine **Einbettung**. Falls M eine Mannigfaltigkeit ist, $M \subset N$, und die Inklusionabbildung $i : M \to N : x \mapsto x$ eine Einbettung ist, dann heißt M eine **Untermannigfaltigkeit** von N.

TMVfer-13 **Feststellung 2.13** *Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Falls $F : M \to N$ eine Einbettung ist, dann ist $F(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N (bzgl. einer geeigneten differenzierbaren Struktur auf $f[M]$ mit der $F\big| : M \to F(M)$ differenzierbar wird).*

Beweis. Sei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas von M, $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha$. Dann ist $\left(\varphi_\alpha \circ F\big|^{-1}\right)$, mit $\varphi_\alpha \circ F\big|^{-1} : F(\mathcal{O}_\alpha) \to U_\alpha$, ein Atlas auf $F(M)$ (diesen wählen wir), da dann $F\big| : M \to F(M)$ und φ_α Homöomorphismen sind, ist auch $\varphi_\alpha \circ F\big|^{-1}$ ein solcher und wegen $F\big|$ bijektiv, ist



gf5

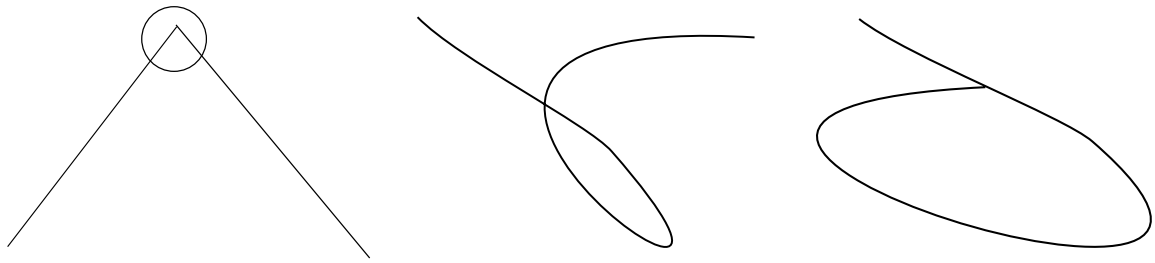
$$\left(\varphi_\beta \circ F\big|^{-1}\right)\left(\varphi_\alpha \circ F\big|^{-1}\right)^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha \in C^\infty.$$

$i : F(M) \to N : x \mapsto x$ ist differenzierbar, denn für einen Atlas $(\psi_\beta)_{\beta\in B}$ von N gilt für alle $\alpha \in A, \beta \in B$:

$$\varphi_\beta \circ i \circ \left(\varphi_\alpha \circ F\big|^{-1}\right)^{-1} = \varphi_\beta \circ i \circ F\big| \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ F\big| \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty,$$

wegen F differenzierbar. ■

Bemerkung Man braucht in Feststellung 2.13 alle Bedingungen für eine Einbettung. Betrachte sonst z. B. : $M = (0,1) \subset \mathbb{R}, N = \mathbb{R}^2$ und folgende Beispiele:



$F \notin C^1$, Knick F nicht injektiv $F\big|$ kein Homöomorphismus

Beispiel Eine parametrisierte (reguläre) C^∞ n-Fläche (gemäß Differentialgeometrie I) $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist eine Immersion der Untermannigfaltigkeit $U \subset \mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ (meistens $m = n+1$).

MVfer-14 **Satz 2.14 (Whitneyscher Einbettungssatz, 1937)** *Jede n-Mannigfaltigkeit lässt sich in den* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *einbetten.*

Beweis. Siehe z. B. : Guillemin/Pollack: Differential Topology. ■

Das Problem für eine gegebene n-Mannigfaltigkeit die kleineste Zahl m zu bestimmen so, dass M in den $\mathbb{R}^m$ eingebettet werden kann, ist in vielen Fällen sehr schwierig und wichtig (gehört jedoch eher zu Differentialtopologie); entsprechendes Problem für Immersion.

TMVfer-15 **Feststellung 2.15** *Sei $F : M \to N$ eine Submersion. Dann gilt für alle $q \in N$ mit $F^{-1}\{q\} \neq \emptyset$, $F^{-1}\{q\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M mit*

$$\dim F^{-1}\{q\} = \dim M - \dim N.$$

Allgemeiner: Falls $U \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist und $F^{-1}(U) \neq \emptyset$, dann ist $F^{-1}(U) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und

$$\dim F^{-1}(U) = \dim M + \dim U - \dim N.$$

Beweis. Übung *(Hinweis: Hauptsatz über implizite Funktionen).* ■

Orientierbarkeit

Definition Ein Atlas $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ einer Mannigfaltigkeit M heißt **orientiert**, falls für alle $\alpha, \beta \in A$ und für alle $p \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ gilt:

$$\det \mathrm{D}\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)\Big|_{\varphi_\alpha(p)} > 0,$$

d.h. falls alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind.
Eine Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar**, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

Bemerkung Es gibt auf einer orientierbaren zusammenhängenden Mannigfaltigkeit genau zwei Orientierungen. Es gibt 2-Mannigfaltigkeiten, die nicht orientierbar sind (z. B. das Möbiusband).

Sei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas von M (M zusammenhängend), $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha$ mit *zusammenhängendem* $\mathcal{O}_\alpha$ und A abzählbar. Ohne Einschränkung sei $A = \mathbb{N}, \{1, 2, ..., m\}$. Wie kann man prüfen, ob M orientierbar ist und ggf. einen orientierten Atlas konstruieren?
Starte mit der Karte φ_{α_1}. Dann konstruiere rekursiv $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_{\alpha_1}$. Seien $\tilde{\varphi}_1, ..., \tilde{\varphi}_k$ schon konstruiert (mit «zusammenhängender Orientierung»). Falls $\mathcal{O}_{\alpha_1} \cup ... \cup \mathcal{O}_{\alpha_k} = M\,(\tilde{\varphi}_i : \mathcal{O}_{\alpha_i} \to U_{\alpha_i})$ - fertig (orientierter Atlas $\tilde{\varphi}_1, ..., \tilde{\varphi}_k$).
Andernfalls: Wähle α_{k+1} als kleinsten Index, so dass $\left(\mathcal{O}_{\alpha_1} \cup ... \cup \mathcal{O}_{\alpha_k}\right) \cap \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}} \neq \emptyset$ und $\alpha_{k+1} \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ existiert wegen M zusammenhängend.
Es gibt folgende Möglichkeiten:

(1) $\det \mathrm{D}\left(\tilde{\varphi}_i \circ \varphi_{\alpha_{k+1}}^{-1}\right)\Big|_{\varphi_{\alpha_{k+1}}(p)} > 0$ für alle $p \in \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}} \cap (\mathcal{O}_{\alpha_1} \cup ... \cup \mathcal{O}_{\alpha_k})$.
Dann definiere $\tilde{\varphi}_{k+1} = \varphi_{k+1}$.

(2) $\det \mathrm{D}\left(\tilde{\varphi}_i \circ \varphi_{\alpha_{k+1}}^{-1}\right)\Big|_{\varphi_{\alpha_{k+1}}(p)} < 0$ für alle $p \in \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}} \cap (\mathcal{O}_{\alpha_1} \cup ... \cup \mathcal{O}_{\alpha_k})$.
Dann definiere $\tilde{\varphi}_{k+1} = \psi\varphi_{k+1}$ mit $\psi : U_{\alpha_{k+1}} \to \psi(U_{\alpha_{k+1}}) : (x^1, ..., x^n) \mapsto (-x^1, ..., x^n)$.

(3) $\det \mathrm{D}\left(\tilde{\varphi}_i \circ \varphi_{\alpha_{k+1}}^{-1}\right)\Big|_{\varphi_{\alpha_{k+1}}(p)} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ für mindestens ein $i, p \in \mathcal{O}_{\alpha_{k+1}} \cap \mathcal{O}_{\alpha_i}$.
Dann ist M nicht orientierbar, dann für einen orientierten Atlas ist nach Wahl von $\tilde{\varphi}_1$ sind die übrigen Orientierungen festgelegt.

Beispiel Das Möbiusband
Sei $M = [-1, 1] \times (-1, 1)/\sim$ mit der Relation

$$(x, y) \sim (u, v) \iff (x = u \wedge y = v) \vee (\{x, u\} = \{-1, 1\} \wedge y = -v)$$

Der Atlas mit den 2 Karten

$$\varphi_1 : (-1,1) \times (-1,1) \to (-1,1) \times (-1,1)$$
$$\varphi_1 = \mathrm{id}$$
$$\varphi_2 : ([-1,1] \setminus \{0\}) \times (-1,1)/_\sim \to (0,2) \times (-1,1)$$
$$\varphi_2([(x,y)]_\sim) = \begin{cases} (x,y) & \text{falls } x > 0 \\ (x+2,-y) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist jedoch nicht orientierbar (φ_1, φ_2 zusammenhängend), da:

$$\det \mathrm{D}\left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)\big|_{(x,y)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (0,1) \\ -1 & \text{falls } x \in (-1,0) \end{cases}$$

3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von positiv definiten symmetrischen Bilinearformen auf T_pM, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ heißt **Riemannsche Metrik** auf M, falls für alle Karten $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha$ eines Atlanten von M und alle $i,j = 1,\dots,n$ die Abbildungen $g_{ij} : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}$ mit $g_{ij}(p) := g_p\left(\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p\right)$ differenzierbar (also in C^∞) sind ($\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p$ bzgl. φ_α).
(M,g) heißt dann eine **n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit** (oder kurz: Riemannsche n-Mannigfaltigkeit oder R. n-Mannigfaltigkeit).

Bemerkung Nach Definition ist $\left(g_{ij}(p)\right)_{i,j}$ die Strukturmatrix von g_p bzgl. der natürlichen Basis $\left(\partial_1\big|_p, \dots, \partial_n\big|_p\right)$ von T_pM bzgl. der Karte φ_α. Also:

$$g_p\left(\sum_{i=1}^n a^i \partial_i\big|_p, \sum_{i=1}^n b^i \partial_i\big|_p\right) = \left(a^1, \dots, a^n\right)\left(g_{ij}(p)\right)\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung

Definition (M,g) heißt **semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit**, falls man die Forderung der positiven Definitheit von g_p durch die schwächere Forderung ersetzt, dass g_p nicht ausgeartet ist, d.h.

$$g_p(X,Y) = 0 \text{ für alle } X \in T_pM \Longrightarrow Y = 0.$$

Bemerkung Falls M zusammenhängend ist, hängt die *Signatur* von g_p nicht von p ab (wegen der Differenzierbarkeit von g).

Einschub zur Signatur (siehe lineare Algebra) Für jede symmetrische Bilinearform β auf ei-

nem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gibt es eine Basis $B = (b_1, ..., b_n)$ von V, so dass

$$\big(\beta(b_i, b_j)\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{n_+} \quad \underbrace{\qquad}_{n_-} \quad \underbrace{\qquad}_{n_0}$$

dann heißt (n_+, n_-, n_0) **Signatur** von β. Ferner gilt: n_+, n_-, n_0 sind durch β eindeutig bestimmt (Tragheitssatz von Sylvester). Falls A die Matrix von β bzgl. einer beliebigen Basis von V ist, dann ist

$$\left.\begin{array}{ll} n_+ & \text{die Anzahl der positiven Eigenwerte} \\ n_- & \text{die Anzahl der negativen Eigenwerte} \\ n_0 & \text{die Anzahl der Eigenwerte mit Wert } 0 \end{array}\right\} \text{jeweils mit Vielfachheit gezählt}$$

β positiv definit $\iff n_+ = n, n_- = n_0 = 0$

β nicht ausgeartet $\iff n_0 = 0$

$n_+ + n_- = \operatorname{rg} A$

Bemerkung In der Physik betrachtet man semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $n_+ = 3, n_- = 1$ ($\to$ Lorentz-Metrik).

Bezeichnung Wenn $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, dann bezeichne $g(X,Y)(p) := g_p(X(p), Y(p))$, also $g(X,Y) \in \mathcal{F}(M)$. Wir können also g als Abbildung $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ auffassen, die insbesondere symmetrisch und bilinear bzgl. $\mathcal{F}(M)$ ist, d.h.

$$g(f_1 X, f_2 Y) = f_1 f_2 g(X,Y),$$
$$g(X,Y) = g(Y,X),$$
$$g(X_1 + X_2, Y) = g(X_1, Y) + g(X_2, Y).$$

Beispiel $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt (bzgl. der Karte id) auf $T_p\mathbb{R}^n$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$g_{ij}(p) = g\left(\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p\right) = \delta_{ij}.$$

RieMf-01 **Feststellung 3.1 (und Definition)** *Seien M eine m-Mannigfaltigkeit, N eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit der Riemann-Metrik $g = (g_p)_{p \in M}$. Sei $F : M \to N$ eine Immersion. Dann wird auf M eine Riemannsche Metrik $\tilde{g} = (\tilde{g}_p)_{p \in M}$ induziert durch*

$$\tilde{g}_p(X,Y) := g_{F(p)}\big(\mathrm{D}F_p(X), \mathrm{D}F_p(Y)\big)$$

für alle $p \in M$, $X, Y \in T_pM$. Sie heißt die von F **induzierte Riemannsche Metrik auf** *M.*

Beweis. $\tilde{g}_p$ symmetrisch, bilinear und in C^∞ ist klar, da $g_{F(p)}$ symmetrisch und bilinear ist und DF_p linear. Zudem ist trivial $g_{F(p)} \geqslant 0$. Mithin

$$\tilde{g}_p(X,Y) = 0 \Longrightarrow g_{F(p)}\big(\mathrm{DF}_p(X), \mathrm{DF}_p(Y)\big) = 0 \overset{\text{g pos. def.}}{\Longrightarrow} \mathrm{DF}_p(X) = 0 \Longrightarrow X = 0,$$

da F eine Immersion ist, also DF_p injektiv. ■

Definition Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Ein **linearer Zusammenhang** auf M ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

so dass für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ und $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

(1) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(2) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

(3) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

(4) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

Man nennt $\nabla_X Y$ die kovariante Ableitung von Y in Richtung X bzgl. ∇.

Ein linearer Zusammenhang heißt **torsionsfrei**, falls zusätzlich für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$:

(5) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

RieMf-02 **Satz 3.2** *Sei (M, g) eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit oder semi-Riemannsche n-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen torsionsfreien linearen Zusammenhang ∇ auf M (d.h. es gelten (1)-(5)), so dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ gilt*

(6) $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X)$ *(Ricci-Identität, Verträglichkeit mit der Metrik)*

Für diesen Zusammenhang gilt:

(7) $g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}[Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])]$

Dieser Zusammenhang heißt der **Riemannsche Zusammenhang** *oder* **Zusammenhang von Levi-Civita**.

Beweis. Zunächst zeigen wir (5), (6) $\Longrightarrow$ (7). Aus (6) folgt

(8) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y)$

(9) $Yg(X,Z) = g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Y X, Z)$

Dann ergibt (8) + (9) - (6):

$$\begin{aligned}
&Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X) \\
&= -g([Z,X], Y) + g([Y,Z], X) + 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y], Z)
\end{aligned}$$

woraus (7) folgt.

Eindeutigkeit: Angenommen $\tilde{\nabla}$ sei ein weiterer linearer Zusammenhang für den (5) und (6) gelten, also damit auch (7). Dann $g(\nabla_X Y, Z) = g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)$, also $g(\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y, Z) = 0$ für alle $Z \in \mathcal{X}(M)$, also $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$ (da g nicht ausgeartet) für alle X, Y, somit $\nabla = \tilde{\nabla}$. Der Beweis wird nach Lemma 3.3 fortgesetzt. ■

RieMf-03 **Lemma 3.3** *Sei (M, g) eine (semi-)Riemannsche n-Mannigfaltigkeit, $\omega : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ eine $\mathcal{F}(M)$-lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $A \in \mathcal{X}(M)$ mit*

$$\omega(Z) = g(A, Z) \text{ für alle } Z \in \mathcal{X}(M). \qquad (*)$$

Beweis. Für $p \in M$ wähle eine Karte $\varphi : \mathcal{O} \to U$ mit $p \in \mathcal{O}$ und sei ∂_i das i-te Basisfeld bzgl. φ auf $\mathcal{O}$. Dann lässt sich $A \in \mathcal{X}(M)$ (lokal) darstellen als $A\big|_{\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^n f^i \partial_i$ mit $f^i \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$.

$\omega(Z) = g(A, Z)$ ist äquivalent zu

$\omega(\partial_i) = \sum_{i=1}^n f^i g_{ij}$ mit $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$ für jedes $i = 1, ..., n$,

denn $\partial_1, ..., \partial_n$ ist eine Basis von $\mathcal{X}(M)$. Da g nicht ausgeartet ist, also $\det g_{ij}\big|_q \neq 0$ für alle $q \in \mathcal{O}$. Also ist A durch $(*)$ eindeutig bestimmt und existiert (punktweise). Da $\omega(\partial_j) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ und $g_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ folgt, dass die aus $(*)$ eindeutig bestimmten $f^i \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ sind. ■

Beweis von Satz 3.2 (Fortzsetzung). Betrachte für feste $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ die Abbildung $\omega : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$, die jedem $Z \in \mathcal{X}(M)$, die durch die rechte Seite von (7) gegebene Funktion aus $\mathcal{F}(M)$ zurodnet. Wir zeigen, ω ist linear:
Nach Lemma 3.3 existiert genau ein Vektorfeld $A \in \mathcal{X}(M)$ mit $\omega(Z) = g(A, Z)$ für alle $Z \in \mathcal{X}(M)$. Setze $\nabla_X Y =: A$. Zu zeigen ist: $\nabla_X Y$ ist ein linearer Zusammenhang.
Die Additivität ist klar, $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ nachrechnen, analog Homogenität in Z (für ω).
Noch zu zeigen bleibt:

$$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y \tag{$\circ$}$$

Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&2g(\nabla_X fY, Z) \\
&= Xg(fY, Z) + fYg(Z, X) - Zg(X, fY) + g(Z, [X, fY]) + g(fY, [Z, X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= 2fg([X, Y], Z) + (Xf)g(Y, Z) - (Zf)g(X, Y) + (Xf)g(Z, Y) + (Zf)g(X, Y) \\
&= 2g(f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z)
\end{aligned}$$

Da dies für alle $Z \in \mathcal{X}(M)$ gilt, folgt die Behauptung $(\circ)$. Also ist ∇ ein linearer Zusammenhang. Zu zeigen bleibt noch, dass (5), (6) erfüllt sind:

$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) \overset{(7)}{=} Xg(Y, Z)$, also gilt (6).

$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) \overset{(7)}{=} g(Z, [X, Y])$ für alle Z,

damit ist $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ torsionsfrei. ■

Definition und Bezeichnung Wir definieren $\mathcal{X}_0(M) := \mathcal{F}(M), \mathcal{X}_k(M) := \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M)^k$, insbesondere also $\mathcal{X}_1(M) = \mathcal{X}(M)$. Ein **Tensorfeld** (kurz: **Tensor**) auf M mit Typ (r, s) mit $r \geqslant 1, s \in \{0, 1\}$ (r-fach kovariant, s-fach kontravariant) ist eine $\mathcal{F}(M)$-r-multilineare Abbildung $B : \mathcal{X}_r(M) \to \mathcal{X}_s(M)$ *über dem Ring* $\mathcal{F}(M)$, d.h.
$B(X_1, ..., X_{i-1}, X_i + fY, X_{i+1}, ..., X_r) = B(X_1, ..., X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, ..., X_r) + fB(X_1, ..., X_{i-1}, Y, X_{i+1}, ..., X_r)$,
für alle $1 \leqslant i \leqslant r, X_i, Y \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{F}(M)$.

Definition Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Dann definiere

$$\tau : \mathcal{X}_2(M) \to \mathcal{X}(M) : \tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

den **Torsionstensor** (bzgl. ∇),

$$R : \mathcal{X}_3(M) \to \mathcal{X}(M) : R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

den **Krümmungstensor** (bzgl. ∇).

RieMf-04 **Satz 3.4** *τ ist ein Tensorfeld vom Typ $(2,1)$ und R ein Tensorfeld vom Typ $(3,1)$.*

Beweis. Übung. ■

RieMf-05 **Lemma 3.5** *Sei $F : \mathcal{X}_r(M) \to \mathcal{X}_s(M)$ ein Tensorfeld auf M vom Typ (r,s) $(r \geqslant 1, s \in \{0,1\})$. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine r-multilineare Abbildung (mit Skalarbereich $\mathbb{R}$)*

$$F_p : (T_pM)^r \to (T_pM)^s \quad ((T_pM)^0 := \mathbb{R}),$$

so dass $F(X_1,...,X_r)(p) = F_p(X_1(p),...,X_r(p))$ (Beachte: $X(p)$ ist hier der Wert der Vektorfelder an der Stelle p).

Beweis. Sei zunächst $r = 1$. Wir müssen zeigen, dass aus $X(p) = \tilde{X}(p)$ folgt $F(X)(p) = F(\tilde{X})(p)$. Sei $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to U_\alpha$ eine Karte mit $p \in \mathcal{O}_\alpha$. Wähle eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ mit $f(p) = 1$, so dass der Träger von f in $\mathcal{O}_\alpha$ liegt (vgl. Satz 2.7) und definiere $X_1,...,X_n \in \mathcal{X}(M)$ durch $X_i(q) := \begin{cases} f(q)\partial_i\big|_q & q \in \mathcal{O}_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, wobei wie üblich $\partial_i\big|_q$ das i-te Basisfeld bzgl. φ (an der Stelle q) bezeichnet. Dann hat man für $fX, f\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ die Darstellungen

$$fX = \sum_{i=1}^n g_i X_i, f\tilde{X} = \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i X_i, \text{ mit } g_i, \tilde{g}_i \in \mathcal{F}(M).$$

Also

$$F(X)(p) = f(p)F(X)(p) = (fF(X))(p) = (F(fX))(p) = \sum g_i(p)F(X_i)(p),$$

entsprechend gilt $F(\tilde{X})(p) = \sum \tilde{g}_i(p)F(X_i)(p)$. Wegen $X(p) = \tilde{X}(p)$ ist auch $g_i(p) = \tilde{g}_i(p)$, also $F(X)(p) = F(\tilde{X})(p)$. Für $r > 1$ folgt die Behauptung naheliegenderweise durch vollständige Induktion. ■

Also ist es sinnvoll $F(X_1\big|_p,...,X_r\big|_p)$ zu schreiben mit $X_i\big|_p \in T_pM$ (wenn F ein Tensor ist).

Bemerkung Ordnet man jedem $p \in M$ eine r-multilineare Abbildung $F_p : (T_pM)^r \to (T_pM)^s$ zu $(r \geqslant 1, s \in \{0,1\})$, so erhält man ein Tensorfeld auf M, falls die Zuweisung differenzierbar ist, d.h. falls das Einsetzen von differenzierbaren Vektorfeldern wieder eine differenzierbare Funktion ($s = 0$) bzw. ein differenzierbares Vektorfeld ($s = 1$) liefert. Statt F_p schreibe F (d.h. die beiden Auffassungen eines Tensorfeldes unterscheiden sich nicht, insbesondere kann man auf r-Tupel von Tangentialvektoren aus T_pM anwenden).

Bemerkung (i) Die (semi-)Riemannsche Metrik g ist ein Tensor vom Typ $(2,0)$, ein so genannter **Metrik-Tensor**.

(ii) Die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]$ ist *nicht* $\mathcal{F}(M)$-bilinear, also ist ein Ausdruck der Form $[v,w]$ mit $v,w \in T_pM$ sinnlos.

(iii) Ein linearer Zusammenhang ∇ ist $\mathcal{F}(M)$-linear in der 1. Komponente, d.h. $\nabla_v Y$ mit $v \in T_pM$ ist nach Lemma 3.5 wohldefiniert, nämlich mit $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p$ für $X \in \mathcal{X}(M)$ beliebig mit $X_p = v$. In der 2. Komponente ist er jedoch *nicht* $\mathcal{F}(M)$-linear (sondern derivativ), d.h. $\nabla_X v, v \in T_pM$, ist sinnlos. $(\nabla_X Y)_p$ hängt dann nicht nur von $Y(p)$ ab, sondern auch von den Werten von Y in der Umgebung von p.

RieMf-06 **Lemma 3.6** *(Rechenregeln) Sei R ein Krümmungstensor eines linearen Zusammenhangs ∇. Dann gilt für alle $X, Y, Z, U \in \mathcal{X}(M)$ und eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit g auf M:*

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, *falls ∇ torsionsfrei*

(3) $g(R(X,Y)Z,U) = -g(R(X,Y)U,Z)$, *falls (6) aus Satz 3.2 gilt (Verträglichkeit)*

(4) $g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y)$, *falls ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang (Satz 3.2)*

Beweis. (1) ist klar nach der Definition von R.

Zu (2)-(4) eine Vorbemerkung: Die die linken und rechten Seiten jeweils linear in jeder Komponente sind und punktweise definiert werden können, genügt es nach Lemma 3.5 die Gleichheit für Basisfelder bzgl. einer Karte zu zeigen. Also können wir annehmen X, Y, Z, U sind Basisfelder und dass damit die Lie-Klammern für je zwei der Vektorfelder X, Y, Z, U verschwinden. Dann folgt aus der Torsionsfreiheit von ∇, dass $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] = 0$, also

$$R(Y,Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X$$
$$R(Z,X)Y = \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z,$$

(wegen der Torsionsfreiheit von $\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z$). Addieren der drei Gleichungen liefert

$$R(Y,Z)X + R(X,Y)Z + R(Z,X)Y = 0$$

unter Verwendung von $\nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$, also (2).

Zu (3). Wir zeigen zunächst $g(R(X,Y)Z,Z) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ (dies reicht aber für Basisfelder) $\Longrightarrow$ (3). Betrachte

$$\underbrace{g(R(X,Y)(Z+U),Z+U)}_{=0} = g(R(X,Y)Z,U) + g(R(X,Y)U,Z) + \underbrace{g(R(X,Y)Z,Z)}_{=0} + \underbrace{g(R(X,Y)U,U)}_{=0}$$

Verträglichkeitsbedingung (6) folgt

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \tag{3.1}$$

$$g(\nabla_Y Z, Z) = \frac{1}{2} Y g(Z,Z) \tag{3.2}$$

Mit (3.1) und (3.2) folgt unter Annahme des Verschwindens der Lie-Klammer

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z) \\ &\overset{(3.1)}{=} Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) \\ &\overset{(3.2)}{=} \frac{1}{2}(XYg(Z,Z) - YXg(Z,Z)) \\ &= \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = 0 \quad ([X,Y] = 0!) \end{aligned}$$

Damit (1)-(3) gezeigt. (4) noch zu zeigen: $g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y)$ folgt aus (1)-(3):

$$\begin{aligned} 2g(R(X,Y)Z,U) &= -g(R(Y,X)Z,U) - g(R(X,Y)U,Z) && (1),(3) \\ &= g(R(Z,Y)X,U) + g(R(X,Z)Y,U) + g(R(Y,U)X,Z) + g(R(U,X)Y,Z) && (2) \\ &= g(R(Y,Z)U,X) + g(R(Z,X)U,Y) + g(R(U,Y)Z,X) + g(R(X,U)Z,Y) \\ &= \ldots = 2g(R(Z,U)X,Y) && (1),(2),(3) \end{aligned}$$

Denn beide Ausdrücke gehen aus Vertauschung von X mit Z, U mit Y hervor. Also ist der Ausdruck $2g(R(X,Y)Z,U)$ invariant unter Vertauschen von X mit Z, U mit Y. ■

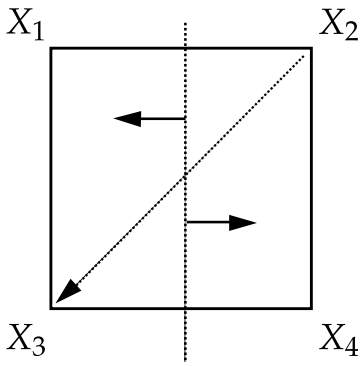
Bemerkung Symmetrie von R. $g(R(X_1,X_2)X_3,X_4)$
Operation der D_4 σ-Permutation der D_4 (Symmetrie des Quadrats)

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = \operatorname{sgn}\sigma\, g(R(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)})X_{\sigma(3)},X_{\sigma(4)})$$

mit $\operatorname{sgn}\sigma \in \{-1,1\}$. D_4 erzeugt $(1,2),(1,3)(2,4)$, also z. B. $(1\,3\,2\,4)$

$$g(R(X_1,X_2)X_3,X_4) = -g(R(X_3,X_4)X_2,X_1)$$

Man kann sich also die Permutationen als Spiegelung im Quadrat an den beiden «Achsen» vorstellen («volle Symmetriegruppe des Quadrats»), 24 Elemente geben 8 unter Beachtung des Vorzeichens.



Unser nächstes Ziel: Definition weiterer «Krümmungsgrößen» mit Hilfe von R.

Bezeichnungen $k : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M), k(X,Y) := g(R(X,Y)Y,X)$. Für $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt

$$\begin{aligned} k(X+fY,Y) &= g(R(X+fY,Y)Y,X+fY) \\ &= k(X,Y) + f\underbrace{g(R(X,Y)Y,Y)}_{=0\,(0)} + f\underbrace{g(R(Y,Y)Y,X+fY)}_{=0\,(1)} \\ &= k(X,Y) = k(Y,X) \qquad (1),(3) \end{aligned}$$

RieMf-07 **Lemma 3.7** *R lässt sich wegen* (1)-(4) *vollständig aus k bestimmen. Insbesondere: $k = 0$, wenn $R = 0$).*

Beweis. Zeige zunächst: $R(X,Y)Z$ kann wegen (1) und (2) durch Ausdrücke der Form $R(X,Y)Y$ ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} R(X,Y+Z)(Y+Z) &= R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + R(X,Z)Y + R(X,Z)Z \\ -R(Y,X+Z)(X+Z) &= -R(Y,X)X + R(X,Y)Z + R(Z,Y)X - R(Y,Z)Z \\ 0 &= R(X,Y)Z + R(Y,X)Z \end{aligned}$$

Addieren der Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) &= R(X,Y)Y + 3R(X,Y)Z + R(X,Z)Z - R(Y,Z)Z \\ &\quad - R(Y,X)X + \underbrace{R(X,Z)Y + R(Z,Y)X + R(Y,X)Z}_{=0} \end{aligned}$$

Also

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{3}\left(R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) - R(X,Y)Y + R(Y,X)X \right.$$
$$\left. -R(X,Z)Z + R(Y,Z)Z\right)$$

in gewünschter Gestalt. Ist ω eine symmetrische Bilinearform, dann gilt:

$$2\omega(X,Y) = \omega(X+Y,X+Y) - \omega(X-X) - \omega(Y,Y)$$

Nach (1), (3), (4) ist $g(R(X,Z)Z,Y)$ symmetrisch in X,Y. Hieraus folgt insgesamt die Behauptung

$$2g(R(X,Z)Z,Y) = k(X+Y,Z) - k(X,Z) - k(Y,Z)$$

■

RieMf-08 **Lemma 3.8** *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien $V,W \in T_pM$ linear unabhängig und $\tilde{V},\tilde{W} \in T_pM$ mit* $\mathrm{Lin}\{V,W\} = \mathrm{Lin}\{\tilde{V},\tilde{W}\}$. *Dann gilt*

$$\frac{k(V,W)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2} = \frac{k(\tilde{V},\tilde{W})}{g(\tilde{V},\tilde{V})g(\tilde{W},\tilde{W}) - g(\tilde{V},\tilde{W})^2}$$

Beweis. Sei $\tilde{V} = a_{11}V + a_{12}V, \tilde{W} = a_{21}W + a_{22}\tilde{W}$. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} k(\tilde{V},\tilde{W}) = g(R(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{W},\tilde{V}) &\overset{*}{=} \det A \cdot g(R(V,W)\tilde{W},\tilde{V}) \\ &\overset{*}{=} (\det A)^2 g(R(V,W)W,V) \\ &= (\det A)^2 k(V,W) \end{aligned}$$

$*$ folgt wegen der Schiefsymmetrie von $g(R(X,Y)Z,U)$ in X,Y und Z,U. Für eine schiefsymmetrische Bilinearform gilt:

$$\begin{aligned} \beta(a_{11}V + a_{12}Wa_{21}V + a_{22}W) &= a_{11}a_{22}\beta(V,W) - a_{12}a_{21}\beta(V,W) \\ &= \det A \cdot \beta(V,W) \end{aligned}$$

Genauso folgt

$$\begin{aligned} g(\tilde{V},\tilde{V})g(\tilde{W},\tilde{W}) - (g(\tilde{V},\tilde{W}))^2 &= \det A(g(V,\tilde{V})g(W,\tilde{W}) - g(V,\tilde{W})g(\tilde{V},W)) \\ &= (\det A)^2(g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2), \end{aligned}$$

da $(X,Y,Z,U) \mapsto g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)$ eine 4-Multilinearform ist, die in X,Y bzw. Z,U schiefsymmetrisch ist. ■

Definition Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ordne jedem 2-dimensionalen linearen Unterraum $\sigma \subset T_pM$ mit $\sigma = \mathrm{Lin}\{V,W\}$ die Zahl

$$K_\sigma := K(V,W) := \frac{k(V,W)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2} = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

zu. K_σ heißt die **Schnittkrümmung von M bzgl.** σ oder **Riemann-Krümmung**.

Bemerkung Nach Lemma 3.7 und der Definition folgt, dass sich die Schnittkrümmung und der Riemannsche Tensor R wechselseitig bestimmen.

Definition Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt ein **Raum konstanter (Schnitt-) Krümmung** oder eine **Raumform**, wenn es eine Zahl κ gibt, mit $K_\sigma = \kappa$, für alle 2-dimen-

sionalen Unterräume σ von Tangentialräumen von M. Man nennt M **elliptisch**, falls $\kappa > 0$, **flach**, falls $\kappa = 0$ und **hyperbolisch**, falls $\kappa < 0$.

Beispiel $\mathbb{R}^n$ ist ein flacher Raum konstanter Krümmung.

Beispiel S^n mit der natürlichen Riemannsche Metrik ($S^n \subset \mathbb{R} + \mathbb{1}$) ist ein elliptischer Raun konstanter Krümmung.

Tensor vom Typ $(r,1)$: $\underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r\text{-multilinear}} \to \mathcal{X}(M)$

Definition Bildung der Spur eines Tensorfeldes vom Typ $(r,1)$ in der i-ten Stelle (Spur oder Kontraktion):

$$\operatorname{tr}_i A(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_r)_p := \operatorname{tr}(U_p \mapsto A(X_{1p}, ..., X_{i-1p}, U_p, X_{i+1p}, ..., X_{rp}))$$

ergibt ein Tensorfeld vom Typ $(r-1,0)$. Bedenke $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} B$.

Definition Für eine Mannigfaltigkeit mit linearen Zusammenhang ∇ und zugehörigem Krümmungstensor R definiere

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(V,W)_p &= \operatorname{tr}(U_p \mapsto R(U_p, V_p)W_p)\\ &= \operatorname{tr}(R(\cdot, V_p)W_p)\end{aligned}$$

Ricci-Tensor mit $U, V, W \in T_pM, p \in M$.

Da die Spur eine lineare Abbbildung im Raum der Endomorphismen in $\mathbb{R}$ ist, ist Ric ein Tensorfeld vom Typ $(2,0)$. Ric ist $\mathcal{F}(M)$-bilinear.
Sei nun M eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E_1, ..., E_n$ eine ONB von T_pM, d.h. $g(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Dann gilt für $X \in T_pM$

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_p(X, E_i) E_i.$$

Auf der Diagonalen der Matrix der linearen Abbildung $U_p \mapsto R(U_p, V_p)W_p$ bzgl. der Basis $E_1, ..., E_n$ stehen also die Elemente $\varepsilon_i g_p(R(E_i, V_p)W, E_i)$. Also ist

$$\operatorname{Ric}(V,W)_p = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_p(R_p(E_i, V_p)W_p, E_i)$$

die Darstellung von Ric bzgl. der ONB mit $g_p(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$.

Achtung: Die Spur einer Bilinearform ist an sich kein vernünftiger Begriff, aber man definiert die Spur einer Blinearform β bzgl. einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform g als $\operatorname{tr} A$, wobei A die eindeutig bestimmte lineare Abbildung ist, mit $\beta(X,Y) = g(X, AY)$.
Für eine ONB $E_1, ..., E_n$ bzgl g, d.h $g(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ergibt sich

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(E_i, AE_i) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \beta(E_i, E_i)$$

Definition Die **Skalarkrümmung** s einer (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit ist definiert als die Spur von Ric bzgl. g, also

$$s(p) = \operatorname{tr} A_p \text{ mit } \operatorname{Ric}(X_p, Y_p) = g_p(X_p, A_p Y_p)$$

also für eine ONB $E_1, ..., E_n$ von T_pM bzgl. der g_p durch

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \operatorname{Ric}(E_i, E_i).$$

Die **Ricci-Krümmung** von M in Richtung $V \neq 0$ ist definiert als

$$\operatorname{ric}(V) := \frac{\operatorname{Ric}(V,V)}{g(V,V)}, \text{ falls } g(V,V) \neq 0$$

($g(V,V) \neq 0$ gilt für alle Riemannsche Mannigfaltigkeiten für alle $V \neq 0$). Sie hängt nach Definition nur vom 1-dimensionalen Unterraum $\operatorname{Lin} V = \mathbb{R} \cdot V \subset T_pM$ ab. Es gilt also für eine ONB $E_1, ..., E_n$ bzgl. g_p

$$s = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ric}(E_i).$$

Koordinatendarstellung

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit, $p \in M, \varphi : \mathcal{O}_\alpha \to U$ eine Karte von M mit $p \in \mathcal{O}_\alpha, (x^1, ..., x^n)$ die Koordinaten von M, d.h.

$$\varphi(q) = (x^1(q), ..., x^n(q)) \text{ für } q \in \mathcal{O}_\alpha.$$

Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf M.

Definition Die **Christoffelsymbole** Γ_{ij}^k (oder Koordinaten) des linearen Zusammenhang ∇ bzgl. der Karte φ sind definiert durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

wobei $\partial\big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ die Basisfelder bezeichnen. Falls ∇ torsionsfrei ist, d.h. $\tau = 0$, dann ist

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = \left[\partial_i, \partial_j\right] = 0$$

(d.h. die Lie-Klammer verschwindet für Basisfelder). Weiter ist dann

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ji}^k \partial_k,$$

also $\tau = 0 \Longrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Für $X = \sum_{i=1}^n f^i \partial_i$ und $Y = \sum_{j=1}^n g^j \partial_j$ ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum f^i \partial_i} \sum g^j \partial_j \\
&= \sum_i \sum_j f^i \frac{\partial g^j}{\partial x_i} \partial_j + \sum_i \sum_j f^i g^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_i f^i \frac{\partial g^k}{\partial x_i} + \sum_i \sum_j f^i g^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit aus der Rechenregel für drei lineare Zusammenhänge $\nabla_U fV = (Vf)U + f\nabla_U V$. Die zweite Gleichheit ergibt sich durch Vertauschen der Summationsindizes $j \leftrightarrow k$.

Sei nun (M, g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang von (M, g). Dann gilt:

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} g^{km} \left(-\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} \right).$$

Dabei bezeichnet $(g^{km})_{k,m} := \left((g_{ij})_{i,j} \right)^{-1}$

Beweis. Übung (Hinweis: vergleiche Gl. (7) aus Satz 3.2). ■

Definition Die Koeffizienten R^s_{ijk} des Riemannsche Krümmungstensors einer Mannigfaltigkeit mit linearen Zusammenhang (bzgl. der Karte φ) sind definiert durch

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = \sum_{s=1}^{n} R^s_{ijk}\partial_s$$

also bei Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang

$$g(R(\partial_j, \partial_k)\partial_i, \partial_m) = \sum_{s=1}^{n} R^s_{ijk} g_{ms}$$

(Stellung der Indizes aus historischen Gründen, vgl. Kühnel). Es gilt

$$R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{r=1}^{n} \left(\Gamma^r_{ki}\Gamma^s_{jr} - \Gamma^r_{ji}\Gamma^s_{kr} \right)$$

Beweis. Übung. ■

Definition Bezeichne

$$R_1(X,Y)Z := g(Y,Z)X - g(X,Z)Y,$$
$$k_1(X,Y) := g(R_1(X,Y)Y, X).$$

Dann ist

$$K_\sigma = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(R_1(X,Y)Y,X)} = \frac{k(X,Y)}{k_1(X,Y)},$$

denn:

$$\begin{aligned} g(R_1(X,Y)Y,X) &= g(g(Y,Y)X - g(X,Y)Y, X) \\ &= g(Y,Y)g(X,X) - g(X,Y)^2 \end{aligned}$$

RieMf-09 **Feststellung 3.9** *Falls die Schnittkrümmung K_σ nur von p abhängt, aber nicht von $\sigma \subset T_pM$ abhängt, also eine Funktion $K : M \to R$ ist, dann gilt $R = KR_1$.*

Beweis. Zunächst ist $k(X,Y) = Kk_1(X,Y)$. Die Formel zur Bestimmung von R aus k im Beweis von Lemma 3.7 ist eine Linearkombination von Termen der Form $k(aX + bY, cY + dY)$. Ferner erfüllt $R_1(X,Y)Z$ dieselben Rechnenregeln (1)-(4) aus Lemma 3.6 wie $R(X,Y)Z$, also folgt $R = KR_1$. ■

RieMf-10 **Satz 3.10 (F. Schur, 1886)** *Wenn die Schnittkrümmung K_σ einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit der Dimension $\geqslant 3$ nicht von σ, sondern nur vom Punkt abhängt, dann ist sie konstant (hängt auch nicht vom Punkt ab.)*

Beweis. Etwas später, da wir zuerst weitere Hilfsmittel brauchen. ■

Definition Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt **Einstein-Raum** (und g eine **Einstein-Metrik**), falls

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda\, g(X,Y)$$

für alle X, Y, wobei $\lambda : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist.

Bemerkung Äquivalent dazu ist, dass die Ricci-Krümmung

$$\mathrm{ric}(X,Y) = \frac{\mathrm{Ric}(X,X)}{g(X,X)}$$

nicht von der Richtung abhängt, sondern nur vom Punkt.

Beispiel Falls $n = 2$ oder (M,g) konstante (Schnitt-)Krümmung K hat, dann ist (M,g) ein Einstein-Raum, denn dann ist $R = KR_1$, also für eine ONB $X_1, ..., X_n$ folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X_1,X_1) &= K\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n g(g(X_1,X_1)X_i,X_i)}_{=n} - \underbrace{\sum_{i=1}^n g(g(X_i,X_1)X_1,X_i)}_{=1}\right)\\ &= K(n-1),\end{aligned}$$

also allgemein (ergänze X zu ONB (X mit $g(X,X) = 1$)). $\mathrm{Ric}(X,X) = K(n-1)g(X,X)$ für X beliebig, also $\mathrm{Ric} = K(n-1)g$.

Beispiel Das Produkt von zwei 2-Mannigfaltigkeiten *gleicher konstanter Krümmung* K ist ein Einstein-Raum, der aber für $K \neq 0$ nicht-konstante Schnittkrümmung hat.

Beweis. Aufgabe. ■

kuehnel **Satz** *Sei (M,g) ein zusammenhängender Einstein-Raum der Dimension $\geqslant 3$ mit* $\mathrm{Ric} = \lambda g$. *Dann ist λ konstant. Falls $n = 3$ ist, dann ist (M,g) sogar ein Raum konstanter (Schnitt-)Krümmung.*

Beweis. Vgl. Kühnel, Differentialgeometrie Satz 6.13 ■

Definition Für $f \in \mathcal{F}(M)$ definiere $\nabla_X f := Xf \in \mathcal{F}(M)$.

RieMf-11 **Feststellung 3.11 (und Definition)** *(Kovariante Ableitung von Tensorfeldern): Sei ∇ ein linearer Zusammenhang und $A : \mathcal{X}_r(M) \to \mathcal{X}_s(M)$ ein Tensorfeld auf M vom Typ (r,s) mit $s \in \{0,1\}$. Dann definiere die* **kovariante Ableitung** *von A in Richtung X durch*

$$(\nabla_X A)(Y_1,...,Y_r) := \nabla_X(A(Y_1,...,Y_r)) - \sum_{i=1}^r A(Y_1,...,Y_{i-1},\nabla_X Y_i,Y_{i+1},...,Y_r).$$

$\nabla_X A$ ist dann ein Tensorfeld desselben Typs wie A. ∇A mit $\nabla A(X,Y_1,...,Y_r)$ ist ein Tensorfeld vom Typ $(r+1,s)$.

Beweis. $\mathbb{R}$-Multilinearität folgt direkt aus der Definition von A und von ∇. Zu zeigen: Für $f \in \mathcal{F}(M)$ und jedes $j \in \{1,...,n\}$:

$$(\nabla_X A)(Y_1,...,Y_{j-1},fY_j,Y_{j+1},...,Y_r) = f(\nabla_X A)(Y_1,...,Y_j,...,Y_r).$$

Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned}&(\nabla_X A(Y_1,...,Y_{j-1},fY_j,Y_{j+1},...,Y_r)\\ &= \nabla_X(fA(Y_1,...,Y_r)) - \sum_{i=1}^r fA(Y_1,...,Y_{i-1},\nabla_X Y_i,Y_{i+1},...,Y_r) - (Xf)A(Y_1,...,Y_r)\\ &= (Xf)A(Y_1,...,Y_r) + f\nabla_X(A(Y_1,...,Y_r)) - f\left(\sum_{i=1}^r A(Y_1,...,Y_{i-1},\nabla_X Y_i,...,Y_r)\right) - (Xf)A(Y_1,...,Y_r)\\ &= f(\nabla_X A)(Y_1,...,Y_r)\end{aligned}$$

wegen $\nabla_X fY_j = f\nabla_X Y_j + (Xf)Y_j$. Ferner ist

$$(\nabla A)(fX, Y_1, ..., Y_s) = (\nabla_{fX} A)(Y_1, ..., Y_s) = f(\nabla_x A)(Y_1, ..., Y_s),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Nach Lemma 3.5 hängt $(\nabla_X A)_p(Y_1, ..., Y_r)$ nur von $Y_1\big|_p, ...Y_r\big|_p$ ab, d.h. $\nabla_X A_p$ kann als r-multilineare Funktion

$$\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r} \to (T_pM)^s$$

augefasst werden.
Schreibweise:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V) = \nabla_X R(Y, Z)V - R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y, \nabla_X Z)V - R(Y, Z)\nabla_X V$$

(entsprechend für R_1).

RieMf-12 **Lemma 3.12** *(weitere Rechenregeln) Sei ∇ torsionsfreier linearer Zusammenhang. Dann gilt*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V = 0 \qquad \text{(2. Bianchi-Identität)}$$

Beweis. Aufgabe. Hinweis: Argumentation ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.6. ■

RieMf-13 **Feststellung 3.13** *Für die (semi-)Riemannsche Metrik g und zugehörigen Levi-Civita (=Riemannschen) Zusammenhang gilt*

$$\begin{aligned}(\nabla g)(X, Y, Z) &= (\nabla_X g)(Y, Z)\\ &= \nabla_X g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\\ &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0\end{aligned}$$

(nach Gleichung (6) aus Satz 3.2) für alle $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, also $\nabla g = 0$.

RieMf-14 **Feststellung 3.14** $\nabla R_1 = 0$, *wobei R_1 definiert ist wie in Feststellung 3.9. D.h. $\nabla_X R_1 = 0$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$.*

$$R_1(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

Beweis. Aufgabe. ■

Beweis von Satz 3.10 Nach Feststellung 3.9 folgt $R = kR_1$ mit $k \in \mathcal{F}(M)$. Also

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V = k(\underbrace{\nabla_X R_1}_{=0})(Y, Z)V + X(k)R_1(Y, Z)V.$$

Wir zeigen nun $X(k) = 0$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$: Für alle $X, Y, Z, V) \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\nabla_X R(Y, Z)V &= X(k)(g(Z, V)Y - g(Y, V)Z)\\ (\nabla_Y R(Z, X)V &= Y(k)(g(X, V)Z - g(Z, V)X)\\ (\nabla_Z R(X, Y)V &= Z(k)(g(Y, V)X - g(X, V)Y)\end{aligned}$$

Addition dieser drei Gleichungen und Lemma 3.12 liefert:

$$\begin{aligned}0 = {} & (Z(k)g(Y, V) - Y(k)g(Z, V))X + (X(k)g(Z, V) - Z(k)g(X, V))Y\\ & + (Y(k)g(X, V) - X(k)g(Y, V))Z\end{aligned}$$

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ beliebig. Da nach Voraussetzung $n \geqslant 3$ ist, gibt es (lokal bzgl. g) orthonormale Vektorfelder Y, Z orthogonal zu X. Für $V = Y$ folgt $0 = Z(k)X - X(k)Z$, also $X(k) = 0$. Also k lokal konstant, also wegen M zusammenhängend global konstant. ■

Definition Seien (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : M \to \tilde{M}$ eine differenzierbare Abbildung. F heißt **isometrisch** oder eine **lokale Isometrie**, falls für alle $p \in M$, $X, Y \in T_pM$ gilt

$$\tilde{g}_{F(p)}\left(\mathrm{DF}\big|_p(X), \mathrm{DF}\big|_p(Y)\right) = g_p(X, Y).$$

Ein isometrischer Diffeomorphismus heißt auch eine **Isometrie**. F heißt **konform** (meist winkeltreu), falls es eine Funktion $\lambda : M \to \mathbb{R}_+$ gibt, sodass $\lambda(p) \neq 0$ und

$$\tilde{g}_{F(p)}\left(\mathrm{DF}_p(X), \mathrm{DF}_p(Y)\right) = \lambda^2(p) g_p(X, Y)$$

für alle $p \in M$ und $X, Y \in T_pM$.

Satz *Für je zwei Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ derselbe Dimension mit derselben konstanten Schnittkrümmung gilt, dass es zu jedem $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ Umgebungen $\mathcal{O}$ von p in M, $\tilde{\mathcal{O}}$ von $\tilde{p}$ in $\tilde{M}$ gibt und eine Isometrie $F : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}}$.*

Definition Seien M, N Mannigfaltigkeiten. $F : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Eine differenzierbare Abbildung $X : N \to \mathrm{TM}$ mit $\pi \circ X = F$, d.h. $X_p \in T_{F(p)}M$ heißt ein differenzierbares **Vektorfeld längs** F. Abbildung:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{TN} \arrow[r, "\mathrm{DF}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \mathrm{TM} \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "X"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Bezeichung $\mathcal{Y}_F$ bezeichne die Menge der differenzierbaren Vektorfelder längs F. $\mathcal{Y}_F$ ist in natürlicher Weise ein $\mathcal{F}(N)$-Modul und ein $\mathcal{F}(M)$-Modul. Für $f \in \mathcal{F}(M), g \in \mathcal{F}(N)$ und $X \in \mathcal{Y}_F$ ist fX mit $(fX)_p = f(p)X_p$ in $\mathcal{Y}_F$ und $g \circ F \in \mathcal{F}(M)$, also

$$(g \circ F)X \in \mathcal{Y}_F, \qquad (gh) \circ F = (g \circ F)(h \circ F).$$

Definition Ein Vektorfeld X längs einer (regulären) Kurve c in M (Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang ∇) heißt **längs parallel** c, falls $\nabla_{\dot{c}} X = 0$. Eine reguläre Kurve c in M heißt eine **Geodätische**, wenn $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$. Wie in der Differentialgeometrie I gilt, dass jede kürzeste reguläre Kurve eine Geodätische ist.

Beweis. Später. ■

Bemerkungen (i) $c : I \to M$ reguläre Kurve heißt also, c ist eine Immersion.

(ii) Zur Definition von $\nabla_{\dot{c}} X$ für ein Vektorfeld X längs c: Dies soll wieder ein Vektorfeld c werden. Zur Definition kann man eine Fortsetzung von $\tilde{X}$ von X (in Umgebung von $c(t)$) betrachten. $\left(\nabla_{\dot{c}(t)} \tilde{X}\right)_{c(t)}$ hängt nicht von der Wahl der Fortsetzung ab. Wir haben die Koordinatendarstellung bzgl. einer Karte betrachtet (könnte man auch als Definition nehmen, Unabhängigkeit unter Kartenwechsel wäre nachzurechnen).

RieMf-15 **Satz 3.15 (Existenz und Eindeutigkeit für parallele Vektorfelder längs Kurven)** *Sei ∇ ein linearer Zusammenhang für M. $c : I \to M$ eine reguläre Kurve, $t_0 \in I, V \in T_{c(t_0)}M$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes paralleles Vektorfeld Y längs c mit $Y_{t_0} = V$.*

Beweis. Wähle Zahlen $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$, sodass $I = [a_1, a_r]$ und $c[a_i, a_{i+1}]$ jeweils im Definitionsbereich einer Karte liegt. Es genügt die Behauptung zu zeigen für den Fall, dass $c(I)$ im Definitionsbereich einer Karte φ liegt (dann zusammensetzen). Sei $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ i-tes Basisfeld bzgl. φ. Ein Vektorfeld Y längs c mit $Y = \sum_{j=1}^n \eta^j \partial_j$, wobei $\eta^j : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist genau dann parallel, wenn

$$\nabla_{\dot c} Y = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathrm{d}\eta^k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}\left(\varphi^i \circ c\right)}{\mathrm{d}t} \eta^j \left(\Gamma_{ij}^k \circ c\right) \right) \partial_k = 0$$

(Koordinatendarstellung von $\nabla_{\dot c} Y$ bzgl. φ einsetzen), also

$$\frac{\mathrm{d}\eta^k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i \leqslant n} \sum_{j \leqslant n} \frac{\mathrm{d}\left(\varphi^i \circ c\right)}{\mathrm{d}t} \eta^j \left(\Gamma_{ij}^k \circ c\right) = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n.$$

Dies ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Das Anfangswertproblem $\sum_{j \leqslant n} \eta^j(t_0)\partial_j = V$ hat eine eindeutig bestimmte auf dem ganzen Intervall definierte Lösung. ■

Nach Satz 3.15 erhält man für alle $t_0, t_1 \in I$ einen Isomorphismus

$$T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M : V \mapsto Y_{t_1},$$

wobei Y das eindeutig bestimmte parallele Vektorfeld längs c ist, mit $Y_{t_0} = V$. Die Inverse ist gerade

$$T_{c(t_1)}M \to T_{c(t_0)}M, W \mapsto Y_{t_0}.$$

Y ist ein paralleles Vektorfeld längs c mit $Y_{t_1} = W$.
Man nennt diese Abbildung die **Parallelverschiebung** von $T_{c(t_0)}M$ in $T_{c(t_1)}M$ längs c. Die parallelen Vektorfelder längs c sind (in natürlicher Weise) ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

RieMf-16 **Satz 3.16 (und Definition)** *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita-Zusammenhang ∇.*

(a) Die Parallelverschiebung bewahrt g, d.h. $g(Y_1, Y_2)$ ist konstant für zwei parallele Vektorfelder längs c.

(b) Zu jedem $p \in M$ und $X \in T_pM \backslash \{0\}$ gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Geodätische $c : I \to M$ mit $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$ und $c(0) = p, \dot c(0) = X$.
Maximal *heißt, dass I maximal ist bzgl. $\subset$.*

(c) Es gibt eine Umgebung U von $0 \in T_pM$ in der die Abbildung $\exp_p : U \to M$ mit $\exp_p X := c_X^{(p)}(1)$ injektiv und differenzierbar ist. ($c_X^{(p)}$ ist die eindeutig bestimmte Geodätische nach b)). Sie heißt die **Exponentialabbildung** *in p.*
Veranschaulichung

Beweis. (a) Es gilt: $\nabla_{\dot c} g(Y_1, Y_2) = g(\nabla_{\dot c} Y_1, Y_2) + g(\nabla_{\dot c} Y_2, Y_1) = 0$.
Die erste Gleichheit folgt wegen der Verträglichkeit von ∇ mit g. Die zweite Gleichheit folgt für Y_1, Y_2 parallel längs c. Also ist $g(Y_1, Y_2)$ längs c konstant.

(b) Falls c die Gleichung $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$ erfüllt, dann ist c die Geodätische. In Kooridnaten bzgl. einer Karte $\varphi : \mathcal{O} \to U$ mit $p \in \mathcal{O}$: Für $x^i(t) := \varphi^i \circ c(t)$ setze im Beweis von Satz 3.15 $\eta^j = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \dot x^j$.

Dann ist die Gleichung $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$:

$$\ddot{x}^k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0$$

für $k = 1, ..., n$. Da $c(t) = \varphi^{-1}\left(x^1(t), ..., x^n(t)\right)$ ist dies ein gewöhnliches DIfferentialgleichungssystem für die $x^1, ..., x^n$ (nicht linear). Das Anfangswertproblem $c(0) = p, \dot{c}(0) = X$ hat in einer Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ von 0 eine eindeutige Lösung. Diese erfüllt $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$, ist also eine Geodätische (falls $g(X, X) = 1$, dann ist sie nach Bogenlänge parametrisiert, da $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ konstant ist nach a).

Nun zur Eindeutigkeit:

Seien c_1, c_2 Lösungen des AWP mit maximalen Parameterintervallen (Definitionsbereichen) I_1, I_2. Zu zeigen $I_1 = I_2$ und $c_1 = c_2$.

$$J_1 := \{t \in I_1 \cap I_2 \mid c_1(t) = c_2(t) \text{ und } \dot{c}_1(t) = \dot{c}_2(t)\}.$$

$0 \in J_1$ und J_1 sind offen in $I_1 \cap I_2$ nach lokaler eindeutiger Existenz.

$$\begin{aligned} J_2 &:= I_1 \cap I_2 \backslash J_1 \\ &= \left\{ \underbrace{t \in I_1 \cap I_2 \mid c_1(t) \neq c_2(t)}_{f^{-1}(M \times M \backslash \Delta_M} \text{ oder } \dot{c}_1(t) \neq \dot{c}_2(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M, f(c_1, c_2) \text{ bzw. } f(\dot{c}_1, \dot{c}_2)\}$$

J_2 ist also offen (als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung). Also ist J_1 in $I_1 \cap I_2$ offen und abgeschlossen und wegen $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist $J_1 = I_1 \cap I_2$ ($J_1 \neq \varnothing$ klar). Also gilt $c_1(t) = c_2(t)$ und $\dot{c}_1(t) = \dot{c}_2(t)$ in $I_1 \cap I_2$. Daraus folgt wegen I_1, I_2 maximal, dass $I_1 = I_2$, denn

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & t \in I_1 \\ c_2(t) & t \in I_2 \end{cases}$$

wäre sonst eine Forsetzung von c_1 und c_2.

(c) Übung.

■

Bemerkung $g(\dot{c}, \dot{c})$ ist nach a) konstant, insbesondere wechselt $g(\dot{c}, \dot{c})$ nicht das Vorzeichen.

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \begin{cases} > 0 \text{ gilt stets für Riemannsche Mannigfaltigkeit, für semi- «raumartig»} \\ < 0 \text{ für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit «zeitartig»} \\ = 0 \textbf{ Nullgeodätische} \end{cases}$$

Definition (Holomiegruppe) Bezeichne $P^c : T_pM \to T_qM$ die Parallelverschiebung längs $c : [a, b] \to M$ mit $c(a) = p, c(b) = q$. Es genügt, dass c stetig und stückweise regulär ist, da die Parallelverschiebung dann aus endlich vielen Teilen zusammengesetzt werden kann (durch Komposition).

Für $c_1 : [a, b] \to M, c_2 : [b, c] \to M$ mit $c_1(b) = c_2(b)$ bezeichne $c_2 * c_1 : [a, c] \to M$ die Kurve mit

$$c_2 * c_1 = \begin{cases} c_1(t) & t \in [a, b], \\ c_2(t) & t \in [b, c]. \end{cases}$$

$c_1^{-1} : [a,b] \to M$ mit $c_1^{-1} = c_1(a+b-t)$. Dann gilt offensichtlich

(i) $P^{c_2 * c_1} = P^{c_1} \circ P^{c_2}$

(ii) $P^{c^{-1}} = (P^c)^{-1}$

(iii) $P^{c \circ f} = P^c$ (f orientierungserhaltende Parametertransformation)

Die Menge

$$\{P^c \mid c : [a,b] \to M \text{ stückweise reguläre Kurve mit } c(a) = c(b) = p, a < b \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{GL}(T_pM)$$

($\mathrm{GL}(T_pM) :=$ Gruppe der Automorphismen von T_pM) ist eine Untergruppe (M Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang). Sie heißt die **Holomiegruppe von** M **in** p. Falls der lineare Zusammehang der Levi-Civita Zusammenhang einer (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, dann ist die Holomogiegruppe sogar eine Untergruppe von

$$O(T_pM, g_p) := \left\{ f : T_pM \to T_pM \mid f \text{ linear, bijektiv und } g_p(X,Y) = g_p(f(X), f(Y)) \right\}.$$

RieMf-17 **Feststellung 3.17** *Falls M zusammenhängend ist, dann ist für $p, q \in M$ die Holomiegruppe von M in p isomorph zu der in q.*

Beweis. Aufgabe. ■

Man spricht dann von der **Holomiegruppe von** M, falls (M,g) eine zusammenhängende semi-Riemannsche n-Mannigfaltigkeit vom Typ (n_+, n_-) ist, dann ist die Holomiegruppe von M isomorph zu einer Untergruppe von

$$O(n_+, n_-) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A^T E_{n_+,n_-} A = E_{n+,n-} \right\},$$

wobei:

$$E_{n_+,n_-} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Die Holomiegruppe (flaches) Möbiusband ist 2-elementig (id, Spiegelung).

RieMf-18 **Feststellung 3.18** *Seien (M,g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Isometrie. Dann gilt*

(a) Wenn $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas von M ist, dann ist ein Atlas $\left(\varphi_\alpha F^{-1}\right)_{\alpha \in I}$ von $\tilde{M}$.

(b) Wenn ∇ bzw. $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang für M bzgl. g bzw. $\tilde{M}$ bzgl. $\tilde{g}$ ist, dann gilt

$$\tilde{\nabla}_{\mathrm{D}F\,X}(\mathrm{D}F\,Y) = \mathrm{D}F(\nabla_X Y).$$

(c) Wenn $c : I \to M$ eine Geodätische in M ist, dann ist $F \circ c$ eine Geodätische von $\tilde{M}$.

(d) $\tilde{R}(\mathrm{D}F\,X, \mathrm{D}F\,Y)\mathrm{D}F\,Z = \mathrm{D}F\,R(X,Y)Z$ (Krümmungstensor auf $\tilde{M}$).

Beweis. Klar, da der Zusammenhang ∇, Geodätische und R durch g eindeutig festgelegt sind. Durch F werden nur die Punkte umbenannt. ■

Beispiel In S^n sind die Geodätischen gerade die Großkreise (mit geeigneter Parametrisierung, also $\|\dot{c}\|$ konstant). Der Großkreis der Form $W \cap S^n$ ist ein 2-dimensionaler *linearer* Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sei $p \in W \cap S^n, X_p \in T_pS^n \setminus \{0\}$ tangential an $W \cap S^n$. Sei s_W die Spiegelung an W in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist s_W eine orthogonale Abbildung, $s_W\big|_{S^n} : S^n \to S^n$ ist eine Isometrie der Riemannsche Mannigfaltigkeit S^n und $s_W(p) = p$, $\mathrm{D}s_W\big|_p X_p = X_p$.
Sei c eine maximale Geodätische durch p ($c(0) = p, \dot{c}(0) = X_p, \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$), dann ist nach Festellung 3.18 $s_p \circ c$ ebenfalls eine solche Geodätische, also (wegen Eindeutigkeit der Geodätischen) $c = s_p \circ c$, also c liegt in $W \cap S^n$ ist also ein Großkreis. Durch jeden Punkt und in jede Richtung geht ein Großkreis. Wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dies alle Geodätischen.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition Sei $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist ihre Länge

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})}\mathrm{d}t.$$

Diese Kurve heißt eine **Kürzeste**, falls für jede Kurve $\tilde{c} : [a, b] \to M$ mit $c(a) = \tilde{c}(a)$, $c(b) = \tilde{c}(b)$ gilt: $L(c) \leqslant L(\tilde{c})$. Sei heißt **lokal Kürzeste**, falls für jedes $t \in (a, b)$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $c\big|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ eine Kürzeste ist.

Wir wollen zeigen, dass lokal Kürzeste (mit $g(\dot{c}, \dot{c}) \neq 0$ konstant) auch Geodätische sind.

RieMf-19 **Satz 3.19** *Sei $C : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar. Bezeichne $c_s(t) := C(t, s)$ und fasse c_s als Kurve auf. Sei $c(t) := c_0(t) = C(t, 0)$ nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. $g(\dot{c}, \dot{c}) = 1$, $l(s) := L(c_1)$. Dann gilt:*

(a) $l'(0) = g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(b,0)}, \dot{c}(b)\right) - g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(a,0)}, \dot{c}(a)\right) - \int_a^b g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(t,0)}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\right)\mathrm{d}t$

(b) Jede lokal Kürzeste (mit $g(\dot{c}, \dot{c}) \neq 0$ konstant) ist eine Geodätische.

Beweis. (a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
l'(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_0 \left(\int_a^b g\left(\frac{\partial C}{\partial t}, \frac{\partial C}{\partial t}\right)^{1/2} \mathrm{d}t\right) \\
&= \int_a^b \frac{2g\left(\frac{\partial^2 C}{\partial s \partial t}\Big|_{(t,0)}, \dot{c}(t)\right)}{2\underbrace{\sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})}}_{=1}}\mathrm{d}t && \text{beachte C(t,0) = c(t)} \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial C}{\partial s}, \dot{c}\right) - g\left(\frac{\partial C}{\partial s}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(b,0)}, \dot{c}(b)\right) - g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(a,0)}, \dot{c}(a)\right) - \int_a^b g\left(\frac{\partial C}{\partial s}\Big|_{(t,0)}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\right)\mathrm{d}t && \text{Hauptsatz}
\end{aligned}$$

(b) Skizze: Angenommen $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a, b)$, dann kann man ein $\varepsilon > 0$ und eine solche Abbildung C finden mit $C(t, s) = c(t)$, falls $|t - t_0| > \varepsilon$ so, dass $g\left(\frac{\partial C}{\partial s}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\right)$ an der Stelle $(t_0, 0)$ größer als 0 ist und das Vorzeichen in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ nicht wechselt. Mit (a) steht dies aber im Widerspruch zu c lokal Kürzeste.

■

Satz (Existenz von konvexen Umgebungen, Whitehead 1932) *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von $0 \in T_pM$, so dass die Exponentialabbildung $\exp\big|_U : U \to \exp(U)$ ein Diffeomorphismus ist und für je zwei Punkte $v_1, v_2 \in V := \exp(U)$*

gibt es eine eindeutig bestimmte nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0, L] \to V$ *mit* $c(0) = v_1$, $c(L) = v_2$ *und diese ist die Kürzeste* in M.

Beispiel M = BÜLD

Bemerkung Anschluss und Zusammenhang zur Differentialgeometrie I:
Seien X, Y, Z tangentiale Vektorfelder längs einer C^∞-n-Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) und eine Einbettung.
Dann gilt die Gaußgleichung

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= g(\mathrm{L}Y, Z)\mathrm{L}X - g(\mathrm{L}X, Z)\mathrm{L}Y, \end{aligned}$$

wobei L die Weingartenabbildung $\mathrm{L} := -\mathrm{DN} \circ (\mathrm{Df})^{-1}$ und g die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (auf $\mathbb{R}^{n+1}$) induzierte Riemannsche Metrik auf $f(M)$ ist. Also ist $g(\mathrm{L}Y, Z) = \mathrm{II}(Y, Z)$ die zweite Fundamentalform.
Falls $X_1, ..., X_n$ eine ONB aus Hauptkrümmungsrichtungen mit Hauptkrümmungen $k_1, ..., k_n$, d.h. X_i sind die Eigenvektoren von L mit Eigenwert k_i ($\mathrm{L}(X_i) = k_i X_i$ und beachte: L ist selbstadjungiert bzgl. g, d.h. $g(\mathrm{L}X, Y) = g(X, \mathrm{L}Y)$ für alle X, Y). Dann ergibt sich

$$R(X_i, X_j)X_k = k_j \delta_{jk} k_i X_i - k_i \delta_{ik} k_j X_j = k_i k_j \left(\delta_{jk} X_i - \delta_{ik} X_j\right),$$

und damit

$$\mathrm{Ric}(X_j, X_k) = \sum_{i=1}^n g(R(X_i, X_j)X_k, X_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ k_j \sum_{j \neq k} k_i & \text{für } j = k \end{cases}$$

Für die Schnittkrümmung gilt

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1, i \neq j} k_i k_j = n(n-1)K_2,$$

wobei $K_2 = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j} k_i k_j = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} k_i k_j$ die elementarsymmetrische Krümmung (für $n = 2$ die Gaußkrümmung).

Definition Eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **(geodätisch) vollständig**, wenn jede Geodätische auf $\mathbb{R}$ definiert werden kann.

RieMf-20 **Lemma 3.20 (und Definition)** *Sei X ein differenzierbares Vekorfeld auf einer n-Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gilt (als Folgerung aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen)*

(a) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve $c_p : I_p \to M$ mit $c_p(0) = 0, \dot{c}_p(t) = X_{c(t)}$, wobei I_p das maximale Intervall um $t = 0$ mit dieser Eigenschaften ist. c_p heißt eine **Trajektorie** *(oder* **Integralkurve***).*

(b) Es gibt eine offene Umgebung U von $(\mathcal{O}, p)$ in $\mathbb{R} \times M$, so dass dort die Abbildung $\varphi : U \to M$ mit $\varphi(t, q) := \varphi_t(q) = c_q(t)$ definiert und differenzierbar ist (also $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(t,q)} = X_{\varphi(t,q)} = \varphi(0, q) = q$. φ heißt **lokaler Fluss um** *p.*

(c) Falls φ auf $\mathbb{R} \times M$ definiert ist, dann nennt man X (und φ) **vollständig**.
In diesem Fall gilt $\varphi_{t+s} = \varphi_t \varphi_s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $t \mapsto \varphi_t$ ist also ein Gruppenhomomorphismus, $(\mathbb{R}, t) \to$ Gruppe der Diffeomorphismen von $M \to M$. Damit ist $\{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen.

(d) Falls $X_p \neq 0$, dann gibt es ein Koordinatensystem $x^1, ..., x^n$ um p mit $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$

(e) Es gilt

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathrm{D}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p\right),$$

wobei φ der lokale Fluss von X um p sei.

Satz *(a) Jede n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter (Schnitt-)Krümmung 0, ± 1 ist lokal isometrisch zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ bzw. S^n bzw. H^n.*

(b) Jede (geodätisch) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter (Schnitt-)Krümmung 0, ± 1 ist isometrisch zu einem Quotienten von $\mathbb{R}^n$, S^n bzw. H^n nach einer Untergruppe der Isometriegruppe $E(n)$ (Bewegungsgruppe) bzw. $O(n+1)$ bzw. $O_+(n,1)$, welche diskret (Orbits, Bilder von einem Punkt, haben keine Häufungspunkte) und fixpunktfrei operiert ($g(x) = x$ für ein $x \Longrightarrow g = \mathrm{id}$).

Beispiel Sei $n = 2$, S^2.
$O(3)$: Die einzige fixpunktfreien diskreten Untergruppen sind $\underset{S^2}{\{\mathrm{id}\}}$ und $\underset{\mathbb{R}P^2}{\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}}$

$\mathbb{R}^2$: $\mathbb{Z}$ erzeugt durch eine Translation t_1
$\mathbb{Z}$ erzeugt durch eine Gleitgespiegelung
Gruppe $\tilde{=} \mathbb{Z}^2$ wird erzeugt von 2 linear unabhängigen Translationen t_1, t_2 Torus
Gruppe wird erzeugt von einer Gleitspiegelung α und einer Translation t_2 (α^2, t^2 linear unabhängig)

Sei $n = 3$, S^3.
$O(4)$ mit:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\frac{2\pi m}{k} & -\sin\frac{2\pi m}{k} \\ \sin\frac{2\pi m}{k} & \cos\frac{2\pi m}{k} \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \cos\frac{2\pi m}{k} & -\sin\frac{2\pi m}{k} \\ \sin\frac{2\pi m}{k} & \cos\frac{2\pi m}{k} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

4 Lie-Gruppen

Definition Eine **Lie-Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer differenzierbaren Struktur, so dass die Abbildung $\cdot : G \times G \to G$, mit $\cdot(x,y) := xy$ und ${}^{-1} : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ differenzierbar sind. Bezeichne e das neutrale Element von G.

Bemerkung Daraus folgt, dass die Linkstranslation $L_x : G \to G$ mit $L_x(y) = xy$ und die Rechtstranslation $R_x : G \to G$ mit $R_x(y) = yx$ Diffeomorphismen sind.
Beachte: $L_{xy} = L_x \circ L_y$, denn $L_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = (L_x \circ L_y)z$.

Definition Ein differenzierbares Vektorfeld Y auf G heißt **links-invariant**, falls $\mathrm{DL}_x \circ Y = Y \circ L_x$ für alle $x \in G$, also $Y_u(f \circ L_y) = Y_{xu}(f)$ für $x, u \in G$, $f \in \mathcal{F}(G)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{TG} \arrow[r, "\mathrm{DL}_x"] & \mathrm{TG} \\ G \arrow[u, "Y"] \arrow[r, "L_x"'] & G \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

Y ist dann durch Y_e eindeutig bestimmt, mit $Y_a = \mathrm{D}L_a Y_e$.

Bemerkung $Y \circ L_x$ ist kein Vektorfeld auf G, sondern ein Vektorfeld längs L_x.
In der zu $\mathrm{DL}_x \circ Y = Y \circ L_x$ äquivalenten Gleichung $Y = \mathrm{DL}_x \circ Y \circ L_{x^{-1}}$ (beachte $L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}$) stehen links und rechts Vektorfelder auf G.

ieGrp-01 **Satz 4.1** *Wenn X, Y links-invariante Vektofelder sind, dann ist auch das Vektorfeld $[X, Y]$ links-invariant.*

Beweis. Seien X, Y links-invariante Vektorfelder, d.h. für alle $a \in G$ und alle $f \in \mathcal{F}(G)$ ist $(Xf) \circ L_a = X(f \circ L_a)$ und $(Yf) \circ L_a = Y(f \circ L_a)$. Damit

$$\begin{aligned} \mathrm{D}L_a\,[X,Y]\,f &= [X,Y]\,(f \circ L_a) \\ &= X(Y(f \circ L_a)) - Y(X(f \circ L_a)) \\ &= X((Yf) \circ L_a) - Y((Xf) \circ L_a) && \text{(links-invariant)} \\ &= X(Yf) \circ L_a - Y(Xf) \circ L_a && \text{(links-invariant)} \\ &= (X(Yf) - Y(Xf)) \circ L_a \\ &= ([X,Y]\,(f)) \circ L_a \end{aligned}$$

■

Definition Für $X_e, Y_e \in T_eG$ definiere $[X_e, Y_e] := [X, Y]_e$, wobei X, Y die zu X_e, Y_e eindeutig bestimmten links-invarianten Vektorfelder sind. Mit dieser Operation wird T_eG zu einer Lie-Algebra $\mathcal{G}$.
Die Elemente von $\mathcal{G}$ betrachten wir entweder als Elemente von T_eG oder (in eindeutiger Weise) als links-invariante Vektorfelder auf G.

Definition Eine Riemannsche Metrik g auf G heißt **links-invariant**, falls

$$g_y(u, v) = g_{xy}(\mathrm{D}(L_x)_y u, \mathrm{D}(L_x)_y v)$$

für alle X, $Y \in G$, u, $v \in T_yG$ gilt, d.h. L_x für alle $x \in G$ eine Isometrie ist.

ieGrp-02 **Feststellung 4.2** *Sei auf $\mathcal{G} = T_eG$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben. Dann erhält man eine links-invariante Metrik durch*

$$g_x(u, v) = \langle (\mathrm{D}L_{x^{-1}})_x u, (\mathrm{D}L_{x^{-1}})_x v \rangle\,,$$

für alle $x \in G$, $u, v \in T_eG$.

Analog definiert man eine rechts-invariante Metrik R_x (die für alle $g \in G$ eine Isometrie ist).

ieGrp-03 **Satz 4.3** *(a) Falls G eine kompakte Lie-Gruppe ist, besitzt G eine* **bi-invariante** *(d.h. links- und rechts-invariante) Riemannsche Metrik.*

(b) Eine links-invariante Metrik g auf G ist genau dann bi-invariante, wenn für alle $U, V, X \in \mathcal{G}$ gilt

$$g([U,X],V) = -g(U,[V,X]).$$

LieGrp-04 **Satz 4.4** *Sei G eine Lie-Gruppe, $\mathcal{G}$ die zugehörige Lie-Algebra und g eine bi-variante Metrik auf G.*

(a) $g(X, \nabla_Y Y) = g(Y,[X,Y])$ für links-invariante Vektorfelder X, Y, ∇ der lineare Zusammenhang zu g

(b) Die Geodätische $c : \mathbb{R} \to G$ mit $c(0) = e$ sind genau die 1-Parameter Untergruppen von G (d.h. für alle $s, t \in \mathbb{R}$: $c(s+t) = c(s)c(t)$ und c differenzierbar)

(c) Seien X, Y, Z links-invariante Einheitsvektorfelder auf G. Dann gilt

(c_1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$

(c_2) $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

(c_3) Falls X, Y orthonormal sind, dann ist die Schnittkrümmung $K(X,Y) = \frac{1}{4}g([X,Y],[X,Y])$

(c_4) $\mathrm{Ric}(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} g([X,E_i],[Y,E_i])$, wobei $E_1, \ldots, E_n$ eine ONB (bzgl. g) von $\mathcal{G}$ ist.

Beweis. Später. ■

LieGrp-05 **Feststellung 4.5** *Jedes links-invariante Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G ist vollständig.*

Beweis. Aufgabe. ■

LieGrp-06 **Feststellung 4.6 (und Definition)** *Für $X \in \mathcal{G}$ setze $\exp_{X \in T_e G} X := \varphi(e)$, wobei φ der Fluss von X (als links-invariantes Vektorfeld) ist.*

(a) Die Kurve

$$\begin{aligned} R &\to G \\ t &\mapsto \exp(t,X) \end{aligned}$$

ist die Trajektorie des links-invarianten Vektorfeldes, die in e startet. Insbesondere ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tX)\Big|_0 = X.$$

(b) Der Fluss von X ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times G &\to G \\ (t,g) &\mapsto g\exp(t,X). \end{aligned}$$

Beispiel Die Lie-Gruppe $S^1 \times S^1$ mit der Darstellung $\left\{ A \,\middle|\, A \in \mathbb{C}^{2x2}, A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, |a_1| = |a_2| = 1 \right\}$.

Die Untergruppe $\left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ ist nicht abgeschlossen in $S^1 \times S^1$ (keine Lie-Untergruppe).

Beispiele für Lie-Gruppen (i) Ein besonders wichtiges Beispiel sind die abgeschlossenen Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n,\mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

(ii) $GL(n,\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ ist offen, denn das Urbild von $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung det.

(iii) $SL(n,\mathbb{K}) := \{A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{K})$ und ein Normalteiler, denn $\det : GL(n,\mathbb{K}) \to (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Homomorphismus.

Sei $B \in GL(n,\mathbb{R})$. Dann bezeichne

$$O(B) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^T BA = B\} \subset GL(n,\mathbb{R})$$

die «**orthogonale Gruppe bzgl.** B».
Für $A \in O(B)$ ist $(B^{-1}A^T B) = E$. $O(B)$ ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$

Beweis. $A_1^T BA_1 = B$, $A_2^T BA_2 = B \Longrightarrow (A_1A_2)^T B(A_1A_2) = A_2^T(\underbrace{A_1^T BA_1}_{B})A_2 = B)$. ■

Speziell gilt
(i) $O(n) = O(E_n)$ die orthogonale Gruppe,
(ii) $O(n_1,n_2) = O\begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & -E_{n_2}\end{pmatrix}$,
(iii) $SO(B) := O(B) \cap SL(n,\mathbb{R})$,
(iv) $SO(n) := O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$ die spezielle orthogonale Gruppe,
(v) $GL(n,\mathbb{R})^+ := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$.

Analog im Komplexen. Sei $B \in GL(n,\mathbb{C})$. Dann bezeichne

$$U(B) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^* BA = B\} \subset GL(n,\mathbb{C}) \quad (A^* := \overline{A^T})$$

$U(B)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$.
Speziell gilt
(i) $U(n) := U(E_n)$ unitäre Gruppe,
(ii) $SU(B) := U(B) \cap SL(n,\mathbb{C})$,
(iii) $SU(n) := U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$ die spezielle unitäre Gruppe.

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to GL(n,\mathbb{K})$$

ist definiert durch ($X^0 = E$)

$$\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut.

ieGrp-07 **Feststellung 4.7** *(a) Falls $XY = YX$, dann gilt:* $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$
(b) Es gilt: $\exp X \in GL(n,\mathbb{K})$
(c) $A(\exp X)A^{-1} = \left(\exp(AXA^{-1}\right)$ *für* $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A \in GL(n,\mathbb{K})$
(d) Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{22}\end{pmatrix}$ *eine obere Dreiecksmatrix ist, dann ist* $\exp A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & & & * \\ & e^{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{a_{nn}}\end{pmatrix}$
(e) $\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X}$
(f) $\exp((t_1+t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X)$
(g) $\mathrm{D}\exp\big|_0 = E$

Beweis. (a) - (d), (f), (g) Einfach.

Zu (e): Fasse X als Matrix über $\mathbb{C}$ auf. Dann ist X trigonalisierbar, also gibt es $S \in GL(n,\mathbb{C})$ mit $X = S^{-1}AS$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{22} \end{pmatrix}$. Somit

$$\det\exp X = \det\exp\left(S^{-1}AS\right) = \det\left(S^{-1}(\exp A)S\right) = \det\exp A = e^{a_{11}}\dots e^{a_{nn}} = e^{\sum_i a_{ii}} = e^{\operatorname{tr} A} = e^{\operatorname{tr} X}$$

Insbesondere ist dann $\det\exp X = e^{\operatorname{tr} X} > 0$. ■

Der Logarithmus

Bezeichne $B_{\mathrm{op}}(X,r) := \{Y \mid \|Y - X\|_{\mathrm{op}} < r\}$. Dann definiere

$$\begin{aligned} \log : B_{\mathrm{op}}(E,1) &\to \mathbb{K}^{n\times n} \\ X &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(X-E)^k}{k} \end{aligned}$$

(konvergiert absolut für $\|X - E\|_{\mathrm{op}} < 1$).

LieGrp-08 **Feststellung 4.8** *(a)* $\exp\log X = X$ *für alle* $X \in B_{\mathrm{op}}(E,1)$
(b) $\log\exp X = X$ *für alle* $X \in B_{\mathrm{op}}(0,\ln 2)$

Beweis. Nachrechnen. ■

LieGrp-09 **Satz 4.9** *Sei* $G \subset GL(n,\mathbb{K})$ *eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist* G *eine Lie-Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{K})$ *(d.h. Untergruppe und Untermannigfaltigkeit). Bezeichne* $\mathcal{G} := \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \exp \mathbb{R}X \subset G\}$. *Dann gilt:* $\mathcal{G}$ *ist in natürlicher Weise isomorph zu* $T_E G$ *(*E *Einheitsmatrix), also eine Lie-Algebra, mit* $[X,Y] = XY - YX \in \mathcal{G}$ *und* $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}$.

Beweis. Später. ■

Definition $L(G) := \mathcal{G} = T_E G$ heißt die zu G gehörige **Lie-Algebra**.
$gl(n,\mathbb{K}) := L(GL(n,\mathbb{K})) = \mathbb{K}^{n\times n}$.

Die Lie-Algebren einiger **Beispiele** abgeschlossener Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$ und **weitere Notationen**:

(a) $SL(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$
$sl(n,\mathbb{K}) := L(SL(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \det\exp tX = 1\}$
$= \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : e^{t \operatorname{tr} X} = 1\} = \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \operatorname{tr} X = 0\}$

(b) $O(B) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T BX = B\}$ mit $B \in GL(n,\mathbb{R})$, dann gilt
$o(B) = L(O(B)) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T B + BX = 0\}$
Beweis. Es gilt $X^T BX = B \iff X^T = BX^{-1}B^{-1}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$
$\underbrace{\exp(tY)^T}_{=\exp tY^T} = B(\exp tY)^{-1}B^{-1} = \exp(-tBYB^{-1}) \iff Y^T = -BYB^{-1} \iff Y^T B + BY = 0.$ ■

(c) $G = U(B)$ mit $B \in GL(n,\mathbb{C})$.
$u(B) := L(U(B)) = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid X^* B + BX == 0\}$
Beweis. Analog, mit $\exp\overline{A} = \overline{\exp A}$. ■

(d) $L(O(n)) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T = -X\}$
$L(U(n)) = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid X^* = -X\}$.

Insbesondere: $L(O(n_1,n_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} A^T & -C^T \\ B^T & -D^T \end{pmatrix}} = \underbrace{-\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}} \right\}$,

also $L(O(n_1,n_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \middle| A^T = -A, C^T = -C \right\}$.

ieGrp-10 **Satz 4.10** *Zu jedem $X \in T_eG$ gibt es eine eindeutige (differenzierbare) 1-Parameter Untergruppe f_x mit $\mathrm{D}f_x\big|_0(1) = X$. Also gibt es eine natürliche Bijektion zwischen der Menge der differenzierbaren 1-Parameter Untergruppen von G mit T_eG.*

Beweis. Setze X eindeutig zu einem links-invarianten Vektorfeld fort, das wieder mit X bezeichnet wird. Betrachte die DGL

$$\mathrm{D}f_t(1) = X_{f(t)}. \tag{$*$}$$

Diese hat in einer Umgebung $(-\varepsilon,\varepsilon)$ von 0 eine eindeutige Lösung $f : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ mit $f(0) = e$. Dann ist für ein festes $s \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $t \mapsto f(s)^{-1}f(s+t)$ ebenfalls eine Lösung im Intervall $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, also gilt wegen der Eindeutigkeit $f(s)^{-1}f(s+t) = f(t)$, also $f(s+t) = f(s)f(t)$.
Für $t \in \mathbb{R}$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{t}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $\overline{f}(t) := f\left(\frac{t}{N}\right)^N$. Dies ist wohldefiniert, denn wenn M ebenfalls eine solche Zahl ist, dann ist $f\left(\frac{t}{N}\right)^N = f\left(\frac{t}{NM}\right)^{NM} = f\left(\frac{t}{M}\right)^M$.
$\overline{f}$ differenzierbar ist klar. $\overline{f}$ ist Gruppenhomomorphismus, da für $\left|\frac{s}{N}\right|, \left|\frac{t}{N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\overline{f}(s+t) = f\left(\frac{s+t}{N}\right)^N = f\left(\frac{s}{N}\right)^N f\left(\frac{t}{N}\right)^N = \overline{f}(s)\overline{f}(t).$$

Also ist $\overline{f}$ eine differenzierbare 1-Parameter Untergruppe mit $\mathrm{D}\overline{f}_0(1) = X$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung f der Gleichung. ■

Definition Die **Exponentialabbildung** $\exp : T_eG \to G$ ist definiert durch $\exp X = f_X(1)$, also $\exp(tX) = f_{tX}(1) = f_X(t)$.

ieGrp-11 **Feststellung 4.11** exp *ist differenzierbar (bzw. analytisch, falls G analytisch).*

Beweis. Sei $X_0 \in G_e$, $f_X(t)$ die Lösung der DGL $(*)$.
Dann ist $(a,b) \mapsto L_a b = ab$ differenzierbar (bzw. analytisch), also ist die Lösung differenziarbar (bzw. analytisch) für $|t| < \varepsilon$ und X in einer Umgebung von X_0. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann ist $\exp X = f_X(1) = f_X\left(\frac{1}{N}\right)^N$ in einer Umgebung von X_0 differenzierbar. ■

ieGrp-12 **Lemma 4.12** *Sei X ein links-invariantes Vektorfeld und f_X die zu X_e gehörige 1-Parameter-Untergruppe. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{F}(G)$*

$$X_e\varphi = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(f_X(h)) - \varphi(e)}{h}.$$

Beweis. Nachrechnen. ■

ieGrp-13 **Feststellung 4.13** *Es gilt:* $\mathrm{D}\exp\big|_0 = \mathrm{id}_{T_eG}$.

Beweis. Für alle $X \in \mathcal{G}$, $\varphi \in \mathcal{F}(G)$ gilt:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}\mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{D}\exp"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{T}G \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\exp"'] & G \end{tikzcd}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\exp\big|_0 X(\varphi) = X_0(\varphi \circ \exp) &\overset{\text{(LieGrp-12)}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\exp tX) - \varphi(e)}{t} \\ = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(f_{tX}(1)) - \varphi(e)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(f_X(t)) - \varphi(e)}{t} \overset{\text{(LieGrp-12)}}{=} X(\varphi) \end{aligned}$$

■

Definition und Folgerung Es gibt eine Umgebung U von $0 \in T_eG$, so dass $\exp\big|_U : U \to \exp U$ ein Diffeomorphismus ist. Die Umkehrabbildung (defineirt auf einer Umgebung von e) wird mit log bezeichnet.

Definition Sehen G, H Lie-Gruppen. Ein **Lie-Gruppen-Homomorphismus** ist ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$, der differenzierbar ist.

LieGrp-14 **Feststellung 4.14** *Sei $\varphi : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_eG \arrow[r, "\mathrm{D}\varphi_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{T}_eH \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $X \in G_e$, f_X die zugehörige 1-Parameter-Untergruppe von G. Dann ist $\varphi \circ f_X$ die zu $\mathrm{D}_{\varphi_e} X$ gehörige 1-Parameter-Untergruppe, also

$$\exp \mathrm{D}\varphi_e X = f_{\mathrm{D}\varphi_e X}(1) = \varphi \circ f_X(1) = \varphi \exp X.$$

■

LieGrp-15 **Satz 4.15** *Sei $f : G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist f differenzierbar (bzw. analytisch, wenn G, H analytisch sind).*

Seien im Weiteren die Lie-Gruppen als analytisch vorausgesetzt. Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathcal{G}$ die zugehörige Lie-Algebra.

LieGrp-16 **Satz 4.16 (Campbell-Barker-Hausdorff (CBH))** *Seien X, $Y \in \mathcal{G}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{G}$, so dass für alle $t \in I := (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t)),$$

wobei

$$Z(t) := \sum_{m=1}^{\infty} t^m Z_m(X, Y),$$

mit

$$\begin{aligned} Z_1(X,Y) &= X+Y, \\ Z_2(X,Y) &= \frac{1}{2}[X,Y], \\ Z_3(X,Y) &= \frac{1}{12}[[X,Y],Y] - \frac{1}{12}[[X,Y],X]. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus $[X,Y]=0$, *dass* $\exp X \exp Y = \exp(X+Y)$.

Beweis. Definiere $Z(t) := \exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY))$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $I := (-\varepsilon,\varepsilon)$ von 0. $Z(t)$ ist analytisch (exp analytisch, $\mathrm{D}\exp\big|_0 = \mathrm{id}$), also

$$Z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m Z_m(X,Y) \text{ für gewisse } Z_m.$$

Für eine in einer Umgebung von e analytische Funktion f haben wir für das zu X gehörige links-invariante Vektorfeld

$$X(X(\ldots(X(f))) =: X^n f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(\exp(tX))\Big|_{t=0},$$

also

$$X^n Y^m f = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial^m}{\partial s^m} f(\exp(tX)\exp(sX)\Big|_{s,t=0},$$

also ist die Potenzreihenentwicklung

$$f(\exp(tX)\exp(sY)) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}(X^nY^m(f))(e).$$

Andererseits ist (schreibe Z_m für $Z_m(X,Y)$)

$$\begin{aligned} f\left(\exp\sum_{m=1}^{\infty} t^m Z_m(X,Y)\right) &= f(\exp(tZ_1+t^2Z_2+t^3Z_3)) + \mathcal{O}(t^4) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tZ_1+t^2Z_2+t^3Z_3)^n(f)(e) + \mathcal{O}(t^4). \end{aligned}$$

Setze oben $s=t$ und Koeffizientenverlgiech (an der Stelle e) ergibt
1. Ordnung: $\frac{t^1}{1!}\frac{t^0}{0!}X(f) + \frac{t^0}{0!}\frac{t^1}{1!}Y(f) = tZ_1(t)$, also $Z_1 = X+Y$.
2. Ordnung: $t^2\left(\frac{1}{2}X^2(f) + XY(f) + \frac{1}{2}Y^2(f)\right) = t^2\left(Z_2(f) + \frac{1}{2}Z_1^2(f)\right) = t^2\left(Z_2(f) + \frac{1}{2}(X+Y)^2(f)\right)$,
also $Z_2(f) = \left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}XY - \frac{1}{2}YX - \frac{1}{2}Y^2\right)(f) = \frac{1}{2}(XY-YX)(f) = \frac{1}{2}[X,Y](f)$.
Term 3. Ordnung entsprechend.
Wenn $[X,Y]=0$, dann ist $XY(f) = YX(f)$. Hieraus folgt durch direktes Nachrechnen, dass $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$. ■

Bemerkung Allgemein ist $Z_{m+1}(X,Y)$ eine «Lie-Klammer m-ter Ordnung».

ieGrp-17 **Satz 4.17** *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Dann ist H eine Lie-Untergruppe und $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{G} \mid \exp tX \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}\}$ die zugehörige Lie-Algebra und $\mathcal{H}$ ist eine Lie–Unteralgebra von $\mathcal{G}$.*

Definition Eine Lie-Algebra $\mathcal{G}$ heißt **kommutativ**, wenn $[X,Y]=0$ für alle $X, Y \in \mathcal{G}$.

ieGrp-18 **Feststellung 4.18** *Eine zusammenhängende Lie-Gruppe G ist genau dann kommutativ (abelsch), wenn ihre zugehörige Lie-Algebra kommutativ ist.*

Beweis. Wähle Umgebung U von 0 in $\mathcal{G}$ und V von e in G, so dass $\exp\big|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\mathcal{G}$ kommutativ. Sei $W \subset U$ offen, mit $e \in W$ und $W \cdot W \subset V$. Für u, $v \in W$ gibt es X, $Y \in U$ mit $u = \exp X$, $v = \exp Y$, also nach CDH

$$uv = \exp X \exp Y = \exp(X+Y) = \exp Y \exp X = vu,$$

also ist W kommutativ. Da $\mathcal{G}$ zusammenhängend, ist W ein Erzeugendensystem von G, also G kommutativ.
Umgekehrt: Aus G abelsch folgt

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)\right)$$
$$\exp(tY)\exp(tX) = \exp\left(t(Y+X) + \frac{t^2}{2}[Y,X] + \mathcal{O}(t^3)\right),$$

also $[X,Y] = [Y,X] = -[X,Y]$, also $[X,Y] = 0$. ■

LieGrp-19 **Folgerung 4.19** *Falls G abelsch ist, dann ist* $\exp : \mathcal{G} \to G$ *ein Gruppenhomomorphismus, d.h.* $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$ *für alle X, $Y \in \mathcal{G}$.*

LieGrp-20 **Feststellung 4.20** *Wenn G abelsch ist, dann ist* $\ker\exp$ *eine diskrete Untergruppe von G, da* $\exp$ *sowohl ein lokaler Diffeomorphismus als auch ein Gruppenhomomorphismus ist.*

LieGrp-21 **Satz 4.21** *Die einzigen zusammenhängenden abelschen Lie-Gruppen sind bis auf Isomorphie $T^n \times \mathbb{R}^n$, wobei T^n der n-dimensionale Torus $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist ($T^n \cong (S^1)^n$).*

Beweis. Wegen G zusammenhängend und abelsch ist exp ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, also $G \cong \mathcal{G}/\ker\exp$. Also Gruppe ist $\mathcal{G} \cong \mathbb{R}^k$ und $\ker\exp$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^k$ und als solche von der Form $\mathbb{Z}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}X_n$ mit $X_1, ..., X_n$ linear unabhängig (Gitter). Ergänze das zu einer Basis $X_1, ..., X_k$, also $G \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}^{k-n}$. ■

Eine kompakte zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe ist also ein Torus (isomorph zu $(S^1)^n$). Sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Eine Untergruppe T heißt ein **Torus**, falls $T \subset G$ mit $T \cong (S^1)^n$.
Ein Torus heißt **maximal**, falls er maximal (bzgl. $\leqslant$) unter allen in G enthaltenen Tori ist. Jeder Torus ist in einem maximalen Torus enthalten (beachte eine Folge von echt in einander enthaltenden Tori $T \subsetneq T_1 \subsetneq T_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G$, dann liegen die zugehörigen Lie-Algebren auch strikt ineinander und die Folge endlich, also $\dim G < \infty$).

Satz *Je zwei maximale Tori in einer kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppe G sind zueinander konjugiert, d.h. $T_2 = gT_1g^{-1}$ für ein $g \in G$. Jedes Element von G ist in einem maximalen Torus enthalten (und damit* exp *surjektiv).*

Definition Der **Rang** einer kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppe ist die Dimension eines (und damit jedes) maximalen Torus.

Beispiel $U(n)$ hat Rang n. Ein maximaler Torus ist

$$T^n := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \, |a_{ii}| = 1 \right\}.$$

$SO(n)$ hat Rang $m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Betrachte

$$T^m = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ 0 & \textit{block} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die adjungierte Darstellung und die Killingform

Sei $x \in G$. Dann definiert $I_x : G \to G$ durch $I_x(y) := xyx^{-1}$ (innerer Automorphismus, in der Literatur auch **Ad**).

Offenbar gilt I_x ist differenzierbar und $I_x(y_1y_2) = I_x(y_1)I_x(y_2)$, $I_e = \mathrm{id}$,

$$I_{x_1x_2}(y) = x_1x_2y(x_1x_2)^{-1} = x_1(x_2yx_2^{-1})x_1^{-1} = I_{x_1}I_{x_2}(y),$$

also ist I_x ein Automorphismus von G und $I : G \to \operatorname{Aut} G$ ein Gruppenhomorphismus.

Bezeichne $GL(\mathcal{G})$ die allgemeine lineare Gruppe des Vektorraums $\mathcal{G}$ ist und $L(\mathcal{G},\mathcal{G})$ den Vektorraum der linearen Abbildung $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$.

Definition Das Differential $\operatorname{Ad} x := (\mathrm{D}I_x)_e : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ in e heißt die **adjungierte Abbildung**.

Nach Kettenregel folgt $\operatorname{Ad}(xy) = \operatorname{Ad} x \circ \operatorname{Ad} y$ und $(\operatorname{Ad} x)^{-1} = \operatorname{Ad} x^{-1}$. Also wird durch $x \mapsto \operatorname{Ad} x$ ein differenzierbarer Homomorphismus von G in $GL(\mathcal{G})$ definiert:

$$\operatorname{Ad} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

Dieser Homomorphismus Ad heißt die **adjungierte Darstellung von** G. Die Abbildung von Ad in e heißt die **adjungierte Darstellung von** $\mathcal{G}$. Definierte weiter

$$\operatorname{ad} := (\mathrm{D}\operatorname{Ad})_e, \operatorname{ad} : \mathcal{G} \to L(\mathcal{G},\mathcal{G}),$$

wobei $L(\mathcal{G},\mathcal{G})$ den Vektorraum der Endomorphismen des Vektorraums $\mathcal{G}$ bezeichnet. Für festes $X \in \mathcal{G}$ heißt $\operatorname{ad} X$ auch die **Adjungierte von** X.

ieGrp-22 **Satz 4.22** *Es gilt* $\operatorname{ad} X(Y) = [X,Y]$.

Beweis. Nach Festellung 4.14 ist für einen Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi : G \to H$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{D}\varphi_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

kommutativ. Also mit $\varphi = I_{\exp tX}$ folgt $I_{\exp tX} \circ \exp = \exp \circ \operatorname{Ad} \exp(tX)$, also

$$\begin{aligned} \exp \operatorname{Ad}(\exp(tX)(tY)) &= \exp(tX)\exp(tY)\underbrace{\exp(tX)^{-1}}_{\exp -tX} \\ &\overset{(CBH)}{=} \exp\left(t(X+Y) + \frac{1}{2}t^2[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)\right)\exp(-tX) \\ &\overset{(4.16)}{=} \exp\left(t\left(X+Y+\frac{1}{2}t[X,Y]-X\right) - \frac{1}{2}t^2\underbrace{[X+Y,X]}_{-[X,Y]} + \mathcal{O}(t^3)\right) \\ &\overset{t\to 0}{=} \exp\left(tY + t^2[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)\right), \end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{Ad}\exp(tX)Y = Y + t\,[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)\|\exp(\mathrm{D}\operatorname{Ad}_e(tX))Y$$

Durch Ableitung nach t an der Stelle 0 folgt

$$\mathrm{D}\operatorname{Ad}_e(X)(Y) = [X,Y]\,.\|\operatorname{ad}(X)(Y)$$

■

LieGrp-23 **Satz 4.23 (Verträglichkeit mit Homomorphismen)** *Sei $\Phi : G \to G'$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus . $\mathcal{G} = T_eG, \mathcal{G}' = T_eG'$. Setze $\varphi := \mathrm{D}\Phi_e$. Dann gilt*

(a) $\varphi \circ \operatorname{Ad} x = \operatorname{Ad}(\Phi x) \circ \varphi$

(b) $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ *ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus, d.h.* φ *ist linear mit* $\varphi\,[X,Y] = [\varphi X, \varphi Y]$ *für alle* $X, Y \in \mathcal{G}$.

Beweis. Es gilt:

$$\Phi(I_x(y)) = \Phi(xyx^{-1}) = \Phi(x)\Phi(y)\Phi(x)^{-1} = I_{\Phi(x)}(\Phi(y))$$

Die Ableitung nach Y in e ergibt

$$\underbrace{\mathrm{D}\Phi_e}_{\varphi}(\operatorname{Ad} X(Y)) = \operatorname{Ad}\Phi(x)((\mathrm{D}\Phi)_e Y).$$

Ableitung nach X in e gibt

$$\varphi\,[X,Y] = \varphi(\operatorname{ad} X(Y)) = (\operatorname{ad}\varphi X)(\varphi Y) = [\varphi X, \varphi Y]\,.$$

■

Bemerkung $L(\mathcal{G},\mathcal{G})$ ist in natürlicher Weise eine Lie-Algebra mit $[X,Y] = XY - YX$.

LieGrp-24 **Feststellung 4.24** $\operatorname{ad} : \mathcal{G} \to L(\mathcal{G},\mathcal{G})$ *ist sogar ein Lie-Algebren-Homomorphismus, d.h.*

$$\operatorname{ad}[X,Y] = [\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y] = \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y - \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X.$$

Beweis. Folgerung aus Satz 4.23. Setze $\Phi = \operatorname{Ad}$, dann ist $\varphi = \mathrm{D}\Phi_e = \operatorname{ad}$. ■

Im Weiteren: $\operatorname{ad} X(Y) = [X,Y]$**.**

Definition und Feststellung Die B auf $\mathcal{G}$ wird definiert durch

$$B(X,Y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) \text{ für alle } X, Y \in G.$$

Sie ist offensichtlich eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{G}$.

Definition Eine Bilinearform auf $\mathcal{G}$ heißt **invariant**, wenn sie unter Ad invariant ist im folgenden Sinn

$$\langle X,Y\rangle = \langle \operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y\rangle \text{ für alle } g \in G, X, Y \in \mathcal{G}.$$

LieGrp-25 **Satz 4.25** *(a) Für alle $Z \in \mathcal{G}$ ist* $\operatorname{ad} Z$ *schiefsymmetrisch bzgl. der Killingform B, d.h.*

$$B(\operatorname{ad} Z(X), Y) + B(\operatorname{ad} Z(Y), X) = 0.$$

(b) B ist invariant.

Beweis. (a) Mit der Jacobi-Identität folgt

$$[X,[Z,[Y,W]]] + [[Y,W],[X,Z]] + [Z,[[Y,W],X]] = 0,$$

also

$$\begin{aligned}[Z,[X,[Y,W]]] &= [X,[Z,[Y,W]]] + [[Z,X],[Y,W]] \\ &= [X,[[Z,Y],W]] + [X,[Y,[Z,W]]] + [[Z,X],[Y,W]].\end{aligned}$$

Mit $[X,Y] = \operatorname{ad} X(Y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} Z \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)(W) &= \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad}(\operatorname{ad} Z(Y))(W) + (\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} Z)(W) \\ &\quad + \operatorname{ad}\operatorname{ad} Z(X)) \circ \operatorname{ad} Y(W).\end{aligned}$$

Durch Spurbildung (bzgl. W) folgt, wegen $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Z \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} Z)$

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad}(\operatorname{ad} Z(Y)) + \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\operatorname{ad} Z(X)) \circ \operatorname{ad} Y) = B(X, \operatorname{ad} Z(Y)) + B(\operatorname{ad} Z(X), Y).$$

(b) Für einen Lie-Algebren-Automorphismus $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ folgt aus $\Psi[X,Y] = [\Psi(X), \Psi(Y)]$, dass $\Psi \circ \operatorname{ad} X = \operatorname{ad}(\Psi X) \circ \Psi$, also $\operatorname{ad}(\Psi X) = \Psi \circ \operatorname{ad} X \circ \Psi^{-1}$, also inbesondere $\Psi = \operatorname{Ad}$ und damit

$$\begin{aligned}B(\operatorname{Ad} g(X), \operatorname{Ad} g(Y)) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\operatorname{Ad} g(X) \circ \operatorname{ad}\operatorname{Ad} g(Y)) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{Ad} g \circ \operatorname{ad} X \circ (\operatorname{Ad} g)^{-1} \circ \operatorname{Ad} g \circ \operatorname{ad} Y \circ (\operatorname{Ad} g)^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) = B(X,Y).\end{aligned}$$

■

Definition Eine Lie-Gruppe heißt **halbeinfach**, wenn die Killingform B ihrer Lie-Algebra nicht degeneriert (ausgeartet) ist.
Achtung: Entspricht nicht ganz der üblichen Definition.

Definition Das **Zentrum** $Z(G)$ **einer Gruppe** ist definiert als

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

Das **Zentrum** $Z(A)$ **einer Lie-Algebra** ist definiert als

$$Z(A) := \{a \in A \mid [a,b] = 0 \text{ für alle } b \in A\}.$$

ieGrp-26 **Satz 4.26** *Falls G halbeinfach ist, so ist $Z(\mathcal{G}) = 0$ und $Z(G)$ diskret.*

Beweis. $Z(\mathcal{G}) = \ker \operatorname{ad}$. Damit

$$X \in \ker \operatorname{ad} \Longrightarrow \operatorname{ad} X = 0 \Longrightarrow \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y = 0\,(Y \in \mathcal{G}) \Longrightarrow B(X,Y) = 0\,(Y \in \mathcal{G}) \overset{\text{halbeinfach}}{\Longrightarrow} X = 0.$$

Also ist $Z(\mathcal{G}) = 0$, also ist $Z(G)$ diskret, somit die zugehörige Lie-Algebra $Z(\mathcal{G}) = 0$ 0-dimensional.
Angenommen $Z(G)$ wäre nicht diskret, dann gibt es $a \in \mathcal{G}$ und $\exp(ta) \in Z(G)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann folgt für alle $b \in \mathcal{G}$

$$\exp(ta)\exp(tb) = \exp(tb)\exp(ta)$$

und damit $[a,b] = 0$ nach CBH. ■

Das Haar'sche Maß

Satz und Definition *Sei G eine kompakte toplogische Gruppe $\left(\cdot,^{-1}\text{ stetig}\right)$. Dann gibt es genau ein links-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(G)$ (offenen Mengen und mit der von ihnen erzeugten σ-Algebra). μ heißt das* **(normierte) Haar'sche Maß**.
Links-invariant heißt hier: $\mu(gM) = \mu(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(G), g \in G$.

LieGrp-27 **Satz 4.27** *Eine zusammenhängende, halbeinfache Lie-Gruppe G ist genau dann kompakt, wenn ihre Killingform B negativ definit ist.*

Beweis. Sei G kompakt, dann folgt: B ist negativ definit.
Wähle ein beliebiges Skalarprodukt (also eine positiv definite symmetrische Bilinearform) $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ auf $\mathcal{G}$. Definiere dann für ein Haar'sches Maß μ

$$\langle X, Y\rangle := \int_{g\in G} \langle \operatorname{Ad} g(x), \operatorname{Ad} g(y)\rangle_1 \mu(\mathrm{d}g).$$

Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariant unter Ad, d.h. $\langle X, Y\rangle = \langle \operatorname{Ad} g(x), \operatorname{Ad} g(y)\rangle$ für alle $g \in G$, also $\operatorname{Ad} g$ eine orthogonale Abbildung auf $\mathcal{G}$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$).
Die Matrix $\operatorname{Ad} X$ ist damit bzgl. einer ONB $X_1, ..., X_n$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine schiefsymmetrische Matrix $(a_{ij})_{ij}$. Also

$$B(X, X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} X) = \sum_i \sum_j a_{ij} a_{ji} = \sum_{i,j} -a_{ij}^2 \leqslant 0$$

und damit B negativ semidefinit, also ist B wegen G halbeinfach negativ definit.
Die Rückweg ist schwerer und wird hier nicht gezeigt. ■

Folgerung Auf einer zusammenhängenden, halbeinfachen, *kompakten* Lie-Gruppe haben wir also in natürlicher Weise eine invariante Riemannsche Metrik, nämlich $-B$.

LieGrp-28 **Feststellung 4.28** *Die Menge der bi-invarianten Riemannschen Metriken auf G steht in natürlicher Bijektion zur Menge der (Ad)-invarianten Skalarprodukte auf $\mathcal{G}$.*

Beweis. Schreibe $g \times g^{-1} = L_g R_{g^{-1}}(X)$, also $\operatorname{Ad} g(X) = \mathrm{D}L_g \mathrm{D}R_{g^{-1}}(X)$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$)-invariant:

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \langle \operatorname{Ad} g(X), \operatorname{Ad} g(Y)\rangle &= \langle \mathrm{D}L_g \mathrm{D}R_{g^{-1}} X, \mathrm{D}L_g \mathrm{R}_{g^{-1}} Y\rangle \\ &\overset{\text{L-invariant}}{=} \langle \mathrm{D}R_{g^{-1}} X, \mathrm{D}R_{g^{-1}} Y\rangle \overset{\text{R-invariant}}{=} \langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Umgekehrt, wenn ein (Ad)-invariantes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathcal{G}$ gegeben ist, dann ist die links-invariante Metrik zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch rechts-invariant:

$$\langle X, Y\rangle = \langle \operatorname{Ad} g(X), \operatorname{Ad} g(Y)\rangle = ... = \langle \mathrm{D}R_{g^{-1}} X, \mathrm{D}R_{g^{-1}} Y\rangle,$$

also rechts-invariant. ■

Durch Ableitung an der Stelle e von $\mathrm{D}\operatorname{Ad}_e = \operatorname{ad}$ folgt

$$0 = \langle \operatorname{ad} Z(X), Y\rangle + \langle X, \operatorname{ad} Z(Y)\rangle = \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle,$$

also die Invarianzeigenschaft

$$\langle X, [Z, Y]\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle.$$

LieGrp-29 **Feststellung 4.29** *Sei g eine links-invariante Metrik. Für links-invariante Vektorfelder X, Y ist $g(X, Y)$ konstant.*

Beweis. $g(X_a, Y_a)_a \overset{\text{links-invariant}}{=} g((\mathrm{D}L_a)X_e, (\mathrm{D}L_a)Y_e)_e \overset{\text{links-invariant}}{=} g(X_e, Y_e)_e$ ■

Beweis von Satz 4.4. (b) Sei X ein links-invariantes Vektorfeld mit der 1-Parametergruppe $c(t) = \exp tX$, dann gilt $\dot{c} = X$, also $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \nabla_X X = \frac{1}{2}[X, X] = 0$. Da X beliebig war, haben wir damit alle Geodätischen durch e gefunden (wegen der Eindeutigkeit).

(c_1) Nach der Koszulformel folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(&Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) \\ &+ g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])), \end{aligned}$$

also

$$2g(\nabla_X Z, Z) = 0 + 0 - 0 + \underbrace{g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])}_{=0 \text{ (wegen invariant)}},$$

also $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y], Z)$ für alle Z. Also gilt $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

(c_2) Nachrechnen:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z &\overset{(a)}{=} \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] + \frac{1}{4}[Y,[Z,X]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &\overset{\text{Jacobi}}{=} -\frac{1}{4}[Z,[X,Y]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= -\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \end{aligned}$$

(c_3) Nachrechnen:

$$\begin{aligned} K(X,Y) = g(R(X,Y)Y,X) &= g\left(-\frac{1}{4}[[X,Y],Y],X\right) \\ &\overset{\text{inv}}{=} -\frac{1}{4}g([X,Y],[Y,X]) = \frac{1}{4}g([X,Y],[X,Y]) \end{aligned}$$

(c_4) Nachrechnen:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i g(R(E_i,X)Y,E_i) \overset{(c)}{=} -\frac{1}{4}\sum_i g([[E_i,X],Y],E_i) \overset{\text{inv}}{=} \frac{1}{4}\sum_i g([E_i,X],[E_i,Y])$$

■

Eine einfache Folgerung aus Satz 4.4 ist

ieGrp-30 **Feststellung 4.30** *Eine kompakte, halbeinfache Lie-Gruppe mit der Killingform B und einer bi-invarianten Riemannschen Metrik $-B$, ist ein Einstein-Raum mit* $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{4}B$.

Beweis. Sei $E_1, ..., E_n$ eine ONB bzgl. $-B$. Dann

$$\begin{aligned} B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y) &= \sum_i g(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y E_i, E_i) = \sum_i g([X,[Y,E_i]],E_i) \\ &= -\sum_i g([[Y,E_i],X],E_i) \overset{\text{inv}}{=} -\sum_i g([Y,E_i],[X,E_i]) = -4\,\mathrm{Ric}(X,Y) \end{aligned}$$

■

Eine andere sinnvolle Definition von Lie-Untergruppe ist

Definition Sei G eine Lie-Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und H eine Lie-Gruppe, so dass die Inklusionsabbildung $H \hookrightarrow G$ differenzierbar ist, mit einem injektiven Differential (Immersion). Dann heißt H eine **Lie-Untergruppe**.

5 Hausaufgaben und Übungen

5.1 Übungsblatt 1

Aufgabe 1: *Zur Topologie*
Sei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein n-dimenionaler C^r-Atlas auf M.
Sei

$$\tilde{A} := \{\varphi : \mathcal{O} \to U \mid \mathcal{O} \subset M \text{ offen}, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \varphi \text{ bijektive Abbildung, so dass}$$
$$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_\alpha) \to \varphi_\alpha(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_\alpha) \text{ für alle } \alpha \in A \text{ ein } C^r\text{-Diffeomorphismus ist}\}.$$

Zeigen Sie, dass A ein C^r-Atlas ist.

Aufgabe 2: *Mannigfaltigkeit*
Versehen Sie den n-dimensionalen reellen projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ in natürlicher Weise mit einer differenzierbaren Struktur. Betrachten Sie dabei den projektiven Raum als die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume des $n+1$ dimensionalen reellen Vektorraumes.

Aufgabe 3: *Produktmannigfaltigkeit*
Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M\times$ N zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten M, N wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Welche Dimension hat diese Produktmannigfaltigkeit?

Aufgabe 4: *Topologie*
Sei $(\mathcal{O}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein n-dimenionaler C^r-Atlas auf M. Sei weiterhin

$$\left\{\mathcal{O} \subset M \mid \varphi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen für alle } \alpha \in A\right\}$$

Zeigen Sie:
X ist eine Topologie auf M bezüglich der die Karten φ_α Homöomorphismen sind.

Aufgabe 5: *Sphäre als differenzierbare Mannigfaltigkeit*
Stereographische Projektion:
Gegeben sei die Sphäre $S^n = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ und ein fester Punkt $N \in S^n$. Mit σ_N bezeichnen wir die stereographische Projektion von N auf die durch den Pol N gegebene Äquatorebene der S^n, definiert durch folgende Konstruktion: Legt man durch den Punkt $P \in S^n, P \neq N$ und durch N eine Gerade g, so schneidet g die Äquatorebene in einem in der Äquatorebene liegendem Punkt $\sigma_N(P)$.

a) Geben Sie im Fall $N = (0, ..., 0, 1)$ und $S = (0, ..., 0, -1)$ die Abbildungsgleichungen von $\sigma_N : S^n \to \mathbb{R}^n$ und σ_S sowie die Gleichungen ihrer Umkehrabbildungen an. Geben Sie einen Atlas der S^n, bestehend aus stereographischen Projektionen, an. Zeigen Sie, dass dieser Atlas differenzierbar ist.
b) Zeigen Sie speziell für $n = 2$, dass durch orthogonale Projektionen auf die Äquatorebene

der S^2 als Karten ebenfalls ein differenzierbarer Atlas auf der S^2 gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass die Atlanten aus a) für $n = 2$ und b) zu derselben differenzierbaren Struktur der S^2 führen.

5.2 Übungsblatt 2

Aufgabe 1: *Vektorfelder (Beweis Satz 2.7)*

Sei M eine n dimensionale Mannigfaltigkeit. $X : M \to \mathrm{TM}$ eine Abbildung mit $\pi \circ X = \mathrm{id}$.

a) Zeigen Sie, dass $X \in \mathcal{X}(M) \iff \forall f \in \mathcal{F}(M) : Xf \in \mathcal{F}(M)$

b) Begründen Sie, wieso jede Abbildung $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, die $\mathbb{R}$-linear und derivativ ist, als differenzierbares Vektorfeld aufgefasst werden kann.

Lösung. a) $X : M \to \mathrm{TM}, \pi \circ X = \mathrm{id}_M, X_p \in M$ für alle $p \in M$.

"$\Rightarrow$" $X \in \mathcal{X}(M)$, also $X \in C^\infty$. Zu zeigen ist: $Xf \in \mathcal{F}(M)$ ist eine C^∞-Funktion. Was heißt, dass ein Vektorfeld differenzierbar ist?

Betrachte $p \in M$ und wähle die Karte $\varphi : \mathcal{O} \to U$ mit $p \in \mathcal{O}$. Die zugehörigen Bündelkarten haben dann die Form

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(\mathcal{O}) \to \varphi(\mathcal{O}) \times \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{\varphi}(Y_q) = \Big(\varphi(q), Y_q(u^i \circ \varphi)\Big) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Aus X differenzierbar folgt

$$\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$$

differenzierbar. Bzgl. der Karte φ ist

$$X_q = \sum_{i=1}^n X(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$$

für eine Umgebung von p (Satz 2.4). Damit erhält man

$$X_q f = \sum_{i=1}^n X(x^i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_q \quad (\in C^\infty)$$

Nachrechnen liefert

$$\left((Xf) \circ \varphi^{-1}\right)(z) = \sum X_{\varphi^{-1}(z)}(x^i) \left.\frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial u^i}\right|_z$$

ist eine C^∞-Funktion von z (ist also eine differenzierbare Funktion). Differenzierbares Vektorfeld heißt, dass die Koordinantenfunktionen bzgl. jeder Karte differenzierbar ist.

"$\Leftarrow$" Idee: Schränke das Vektorfeld auf die Karte ein und zeige dort die Differenzierbarkeit

$$h : M \to \mathbb{R}, h(x) := \begin{cases} 1 & x \in \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O} \\ \in [0,1] & x \in \mathcal{O} \backslash \tilde{\mathcal{O}} \text{ offen, } p \in \tilde{\mathcal{O}} \\ 0 & x \in M \backslash \mathcal{O} \end{cases}$$

und definiere weiter

$$\overline{x}^i(q) := \begin{cases} x^i(q) & q \in \tilde{\mathcal{O}} \\ x^i(q)h(q) & x \in \mathcal{O} \backslash \tilde{\mathcal{O}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\left(X(\overline{x}^i \circ \varphi^{-1}\right) = X_{\varphi^{-1}(q)}(\overline{x}^i)$, d.h. alle Koordinantenfunktionen des Vektorfeldes bzgl. der Karte sind alle differenzierbar (als Komposition differenzierbarer Funktionen) für $i = 1, ..., n$ und damit auch das Vektorfeld differenzierbar.

b) Zur Erinnerung: Die Abbildung $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ ist derivativ, $\mathbb{R}$-linear (als Ring der Funktionskeime), d.h.

$$X(f+g) = X(f) + X(g), \qquad X(fg) = fXg + gXf,$$

für alle $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Jedes $p \in M$ wird abgebildet auf $X_p \in T_pM$ mit $X_pf = (Xf)(p)$, mit

$$X_p(f+g) = X_pf + X_pg, \qquad X_p(fg) = f(p)(X_pg) + g(p)(X_pf).$$

Betrachte nun $\tilde{X} : M \to \mathrm{TM}$ mit $\tilde{X}(p) = (p, X_p)$ und $\pi \circ \tilde{X} = \mathrm{id}_M$, dann ist $\tilde{X}$ nach a) ein differenzierbares Vektorfeld.

□

Aufgabe 2:

Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M), f, g \in \mathcal{F}(M)$.

a) Ist $XY \in \mathcal{X}(M)$, wobei $(XY)(f) := (XY)(f) := X(Y(f))$ für alle $f \in \mathcal{F}(M)$

b) Geben Sie alle Ausdrücke der 3 Symbole X, Y, f bzw. X, f, g in allen Reihenfolgen mit X "steht links" von Y , f "steht links" von g und beiden Beklammerungen an. Welche dieser Ausdrücke ergeben ein Vektorfeld, welche eine C^∞-Funktion bzw. welche mathematischen Objekte werden sonst beschrieben?
Wo kann man gegebenenfalls Klammern weglassen?

Lösung. a) Betrachte $\tilde{f} = f \circ g$, dann

$$\begin{aligned}(XY)(fg) &= X(Y(fg)) \\ &= X\left(fYg + gYf\right) \\ &= (Xf)(Yg) + f(XY)g + (Xg)(Yf) + g(XY)f\end{aligned}$$

Dies ist im Allgemeinen also kein Vektorfeld, da die Derivationseigenschaft verletzt ist.

b) Wir gehen die Fälle chronologisch durch:

i) $X(Yf) \in \mathcal{F}(M)$, denn $Yf \in C^\infty$

ii) $(XY)f = X(Yf)$ gilt nach Definition

iii) $X(fY)$, dann ist $fY \in \mathcal{X}(M)$, aber insgesamt ist dies kein Vektorfeld nach a)

iv) $(Xf)Y \in \mathcal{X}(M)$, denn $Xf \in \mathcal{F}(M)$

v) $f(XY) = (fX)Y \notin \mathcal{X}(M)$ nach a)

vi) $X(fg) \in \mathcal{F}(M)$

vii) $(Xf)(g) \in \mathcal{F}(M)$, denn $(Xf \in \mathcal{F}(M))(g) \in \mathcal{F}(M)$

viii) $f(Xg) = (fX)g \in \mathcal{F}(M)$
ix) $(fg)X = f(gX) \in \mathcal{X}(M)$
Man beachte insbesondere vi) $\neq$ vii)!

□

Aufgabe 3: *Vektorfelder und LIE-Klammer*
Sei $M = \mathbb{R}^2$, $X = u_1u_2\partial_1$ und $Y = u_2\partial_2$ Vektorfelder auf M und $g : M \to \mathbb{R}$ mit $g(u_1, u_2) = u_1^2u_2$. Geben Sie gX und $X(g)$ sowie $[X,Y]$, $[X,Y](g)$, $[gX,Y]$ und $[gX,Y](g)$ an.

Lösung. $gX = u_1^2u_2u_1u_2\partial_1 = u_1^3u_2^2\partial_1$

$$X(g) = u_1u_2\partial_1\left(u_1^2u_2\right) = 2u_1^2u_2^2$$

$$\begin{aligned}[X,Y] &= u_1u_2\partial_1(u_2\partial_2) - u_2\partial_2(u_1u_2\partial_1)\\ &= u_1u_2^2\partial_{12} - u_1u_2(\partial_1 + u_2\partial_{12})\\ &= -u_1u_2\partial_1\\ &= -X\end{aligned}$$

$$[X,Y](g) = -Xg = -u_1u_2\partial_1\left(u_1^2u_2\right) = -2(u_1u_2)^2$$

$$[gX,Y] = g[X,Y] - (Yg)X = -gX - gX = -2gX$$

$$\begin{aligned}[X,Y] &= -2gX(g)\\ &= -2u_1^3u_2^2\partial_1\left(u_1^2u_2\right)\\ &= -4u_1^4u_2^3\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4: *zur LIE-Klammer*
Beweisen Sie für die LIE-Klammer von Vektorfeldern X, Y, Z und für $f \in \mathcal{F}(M)$:
a) die JACOBI-Identität: $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[X,Z]] = 0$
b) $[X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$
c) $[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X$

Aufgabe 5: *Fortsetzung Sphäre*
Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := x^2 + z$ und $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T \in S^2$.
Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial u_i}(f)$ für $i = 1,2$ in der Karte aus Übung 1 Aufgabe 5b) mit der oberen Hemisphäre als Kartenumgebung, sowie in der mit der rechten Hemisphäre als Kartenumgebung. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis bzgl. rechten Hemisphäre auch, indem Sie das Transformationsgesetz anwenden.

Vorgaben: obere Hemisphäre $\Psi_o(x,y,z) = (x,y)$
rechte Hemisphäre $\Psi_r(x,y,z) = (x,z)$

Aufgabe 6: *LIE-Algebra*

a) Seien $M_1 := \mathbb{R}^{n\times n}, M_2 := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\}$.
Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-Vektorräume M_i zusammen mit der LIE-Klammer $[\cdot,\cdot]$ eine LIE-Algebra bilden ($i = 1,2$), wobei $[A,B] := AB - BA$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ zusammen mit $\times$ (vektorielles Produkt) eine LIE-Algebra bildet, die isomorph zu M_2 aus Aufgabenteil a) (für $n = 3$) ist, d.h. geben Sie eine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to M_2$ an mit $f(a \times b) = [f(a), f(b)]$.

5.3 Übungsblatt 3

Aufgabe 1: *Riemannsche Produktmannigfaltigkeit*
In der dritten Aufgabe des ersten Übungsblattes wurde zu zwei Mannigfaltigkeiten M, N explizit die Produktmannigfaltigkeit konstruiert. Seien nun zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g_1) und (N, g_2) gegeben. Diese induzieren auf natürliche Art und Weise eine Riemannsche Metrik (Produktmetrik) auf der Produktmannigfaltigkeit. Wie sieht diese in lokalen Koordinaten aus?

Aufgabe 2: *Feststellung 3.1*
Zeigen Sie, dass die Festellung 3.1 aus der Vorlesung für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten nicht gilt. Geben Sie dazu ein Beispiel einer 4-dimensionalen semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit Signatur $(3,1)$ an und eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die mit der induzierten Bilinearform keine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3: *linearer Zusammenhang*
Seien ∇ und $\tilde{\nabla}$ lineare Zusammenhänge auf einer Mannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, dass $\nabla - \tilde{\nabla}$ ein Tensorfeld vom Typ $(2,1)$ ist.

b) Sei $\tau : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ durch
$$\tau(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
definiert. Zeigen Sie, dass τ ein Tensorfeld vom Typ $(2,1)$ ist.

Aufgabe 4: *Clifford-Torus*
Gegeben sei die Sphäre $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ und die Abbildung $\Phi : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ mit $(x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x,y)$.
Zeigen Sie, dass Φ eine injektive differenzierbare Abbildung (sogar Immersion) des zweidimensionalen Torus $S^1 \times S^1$ in die dreidimensionale Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist.

Lösung. Bildet Φ in die $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ab? Klar, denn $\|\Phi\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 1$. Wählen wir nun die Parametrisierung
$$\Phi(\varphi,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\vartheta, \sin\vartheta\Big) \quad (0 \leqslant \varphi, \vartheta < 2\pi)$$

ist Φ offensichtlich glatt und es gilt

$$d\Phi(\varphi,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \neq 0 \; \forall \varphi,\vartheta \in [0,2\pi).$$

Somit ist Φ injektiv. □

Aufgabe 5: *Veronese-Fläche*
Gegeben sei die Abbildung $\Phi : S^2 \to \mathbb{R}^6$:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3\right).$$

a) Zeigen Sie, dass $\Phi(S^2) \subset S^5$ gilt, und dass $\Phi(S^2)$ in einer 4-dimensionalen Sphäre vom Radius $\sqrt{\frac{2}{3}}$ liegt.
b) Zeigen Sie, dass $\Phi : S^2 \to S^5$ differenzierbar ist. (Die differenzierbaren Strukturen auf S^2 und S^5 seinen dabei durch stereographische Projektionen gegeben.) Zeigen sie, dass Φ sogar eine Immersion ist.
c) Bestimmen Sie die von Φ induzierte Riemannsche Metrik auf S^2.
d) *Zusatz:* Zeigen Sie: Φ induziert eine injektive differenzierbare Abbildung (sogar Immersion) der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in S^5.

Aufgabe 6: *Riemannscher Krümmungstensor*
Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M.
Sei $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ durch

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

definiert. Beweisen Sie: R ist ein Tensorfeld vom Typ $(3,1)$.

5.4 Übungsblatt 4

Aufgabe 1:
Sei (M,g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Riemannsche Zusammenhang. Beweisen Sie
a)

$$R^s_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^s_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^s_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{r=1}^{n}\left(\Gamma^r_{ki}\Gamma^s_{jr} - \Gamma^r_{ji}\Gamma^s_{kr}\right)$$

b) Für jedes $X \in \mathcal{X}(M)$ gilt $\nabla_X R_1 = 0$, wobei

$$R_1(X,Y)Z := g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

Aufgabe 2: *Submersion*
Seien M eine $(m+n)$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit $(\in C^\infty)$ und N eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Seien weiterhin $U \subset N$ eine n_2-dimensionale

Untermannigfaltigkeit von N und $F : M \to N$ eine Submersion. Dann ist $F^{-1}(U)$ eine $(n_2 + m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 3:
Sei (M,g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Riemannsche Zusammenhang. Beweisen Sie

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} g^{km} \left(-\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} \right).$$

Aufgabe 4: *Induzierete Metriken und Zusammenhänge*
Gegeben seien die Immersionen

a) Clifford-Torus

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^4 \\ (u_1, u_2) &\mapsto \big(\cos u_1, \sin u_1, \cos u_2, \sin u_2\big) \end{aligned}$$

b) Standard-Torus

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^4 \\ (u_1, u_2) &\mapsto \big((R + s\cos u_2)\cos u_1, (R + r\cos u_2)\sin u_1, r\sin u_2\big), \end{aligned}$$

wobei $0 < r < R$ gelte.

Berechnen Sie die durch Φ_1, Φ_2 induzierten Riemannschen Metriken. Welche der Immersionen sind isometrisch? Berechnen Sie die Christoffel-Symbole der Levi-Civita-Zusammenhänge.

Aufgabe 5: *Poincaré-Halbebene*
Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ mit der Metrik

$$g_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{x_n^2}$$

Bestimmen Sie den Krümmungstensor, die Schnittkrümmung, den Ricci-Tensor, die Ricci-Krümmung und die Skalarkrümmung.

5.5 Übungsblatt 5

Aufgabe 1: *Schwarzschild-Halbebene*
Sei $M = \big\{(t, r) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 1\big\}$ mit der Metrik

$$\big(g_{ij}\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r-1} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $(t, r) \to (t + b, r)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $(t, r) \to (-t, r)$ Isometrien sind.
b) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole von M.
c) Zeigen Sie, dass die r-Koordinatenlinien Geodätische sind.

Aufgabe 2: *Holonomiegruppe*
Man zeige, dass die Holonomiegruppe der Standard-Sphäre S^2 tatsächlich alle Drehungen enthält und somit $SO(2)$ als Untergruppe von $O(2)$ ist.

Aufgabe 3: *Lemma 3.12*
Zeigen Sie: Sei ∇ ein torsionsfreier linearer Zusammenhang und R der zu ∇ gehörige Krümmungstensor. Dann gilt für je 4 Vektorfelder X, Y, Z, V die 2. Bianchi-Identität:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$$

Aufgabe 4: *Wendelfläche*
Gegeben sei die Immerion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(u,v) = \Big(v\cos u, v\sin u, u\Big)$

a) Berechnen Sie die durch Φ auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Metrik.
b) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole.
   (Zur Kontrolle:
   $$\Gamma^2_{11} = -v, \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{v}{1+v^2}$$
   und Null sonst.)
c) Berechnen Sie die Parallelverschiebung längs des (stückweise geradlinigen) geschlossenen Weges
   $$(u_0, v_0) \to (u_0, 0) \to (0,0) \to (0, v_0) \to (u_0, v_0),$$
   wobei $(u_0, v_0) \neq (0,0)$.

Aufgabe 5: *Holonomiegruppe*
Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, wie skizziert, das Trapez mit einem Paar von Seiten identifiziert und versehen mit der natürlichen Riemannschen Metrik.
Bild
Bestimmen Sie die Holonomiegruppe von M in Abhängigkeit von $\alpha \in (0, \pi]$.

Aufgabe 6: *Poincaré-Halbebene*
Fortsetzung Übungsblatt 3 Aufgabe 5.
Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ mit der Metrik

$$g_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{x_n^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass die x_n-Koordinatenlinien Geodätische sind.
   Hinweis: Die Christoffelsymbole der Poincaré-Halbebene haben die Gestalt:
   $$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{x_n}\left(\delta_{mn}\delta_{ij} - \delta_{jn}\delta_{im} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)$$
b) Sei ab jetzt speziell n = 2.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + t, x_2),\\ (x_1, x_2) &\mapsto (-x_1, x_2),\\ (x_1, x_2) &\mapsto \tfrac{r^2}{x_1^2+x_2^2}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ Isometrien sind.

c) Bestimmen und skizzieren Sie alle Geodätischen in M.

Aufgabe 7: *Sphäre $S_1^2 \subset \mathbb{R}_1^3$*

Sei die Immersion

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_1^3\\ (u_1, u_2) &\mapsto \big(\sinh u_1, \cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2\big)\end{aligned}$$

gegeben. $\left(\Phi|_{\mathbb{R}\times(0,2\pi]}\right)$ ist eine lokale Parametrisierung der Sphäre $S_1^2 \subset R_1^3$ vom Radius 1. Berechnen Sie die durch Φ induzierte Metrik. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita Zusammenhanges.

Hinweis: R_1^3 bezeichnet einen *Minkowski-Raum*. Also den gewöhnlichen 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\{x_1, x_2, x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ zusammen mit dem semi-definiten Skalarprodukt

$$\langle X, Y\rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

5.6 Übungsblatt 6

Aufgabe 1: *Quaternionen ($SU(2), SO(3)$)*

Seien $E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie, dass

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E, IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J$$

gilt und zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-lineare Hülle von E, I, J, K in $\mathbb{C}^{2,2}$ (mit der Matrizenmultiplikation) einen Schiefkörper bildet mit E als 1.

Er heißt der Quaternionenschiefkörper und wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Definiere für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\overline{(aE + bI + cJ + dK)} &:= aE - bI - cJ - dK\\ |aE + bI + cJ + dK| &:= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\\ \mathrm{Re}(aE + bI + cJ + dK) &:= a\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie $SU(2) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ und $SU(2) \cong S^3$ (als Mannigfaltigkeit).

c) Sei $\sim: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ durch $\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}^{\sim} := uI + vJ + wK$ definiert und für $z \in SU(2)$ die Abbildung $\varphi(z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $(\varphi(z))^{\sim} = z\tilde{x}\bar{z}$ definiert ($z \in SU(2)$, $x \in \mathbb{R}^3$).

Zeigen Sie, dass für $z = E\cos\alpha + \tilde{x}\sin\alpha$ mit $\|x\| = 1$, $\varphi(z)$ eine Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}x$

und Drehwinkel 2α ist.
Zeigen Sie, dass $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie $\ker \varphi$.

Aufgabe 2: *Tangentialraum im Einselement*
Bestimmen Sie die Lie-Algebren, der folgenden Lie-Gruppen: $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ bzw. $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sowie der Heisenberg-Gruppe.
Bestimmen Sie dazu alle Tangenten an Kurven innerhalb der jeweiligen Untergruppe. Als «Punkt» soll die Einheitsmatrix gewählt werden. Betrachten Sie dazu $A(t)$ als eine stetig differenzierbare Matrizenfunktion in der jeweiligen Untergruppe mit $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, sowie $A(0) = E$. Sind die dabei entstehenden Tangentailräume abgeschlossen bezüglich Matrizenmultiplikation?

Bemerkungen zur Möbiusgeometrie bzw. zur Geometrie in der hyperbolischen Ebene.

Aufgabe 3: Lie-*Algebren*
Bestimmen Sie die Lie-Algebren folgender Gruppen (als Unterraum von $K^{n,n}, K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$): $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SU(n)$, sowie G_1 = (Gruppe der reellen oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbb{R}^{n,n}$, deren Diagonalelemente 1 sind) und G_2 = (Gruppe der komplexen oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbb{C}^{n,n}$, deren Diagonalelemente den Betrag 1 haben).

Aufgabe 4: Lie-*Gruppen*
Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Lie-Gruppen (für n, n_1, $n_2 \geqslant 1$)

$$SL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C}), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n,\mathbb{C}), SO(n_1,n_2), U(n_1,n_2), SU(n_1,n_2),$$

sowie G_1, G_2 aus Aufgabe 3.

Index

C^k-geschlossene Kurve, 12
C^r-n-Fläche, 16
C^r-Atlas, 52
    maximal, 52
    vollständig, 52
C^r-Kurve auf f, 21
$T_p(M)$, 56
DF, 62
$\mathcal{F}_p(M)$, 55
$\mathcal{O}(p)$, 55
$\mathcal{F}(M)$, 59
$\mathcal{X}(M)$, 59
TM, 58
i-te elementarsymmetrische Krümmung, 24
äquivalent (Atlanten), 52

Ableitungsgleichungen, 6
Adjungierte, 93
adjungierte Abbildung, 93
adjungierte Darstellung, 93
assoziierte Familie, 40
Asymptotenlinie, 27
Asymptotenlinienparametrisierung, 27
Asymptotenrichtung, 27

Bündelkarte, 58
Bündelprojektion, 58
Basisraum, 58
Binormalenvektor, 6

Christoffel-Symbole, 41
Christoffelsymbole, 74

Darboux 3-Bein, 23
Derivation, 56, 60
derivativ, 59
108
Diffeomorphieklasse, 53
Diffeomorphismus, 53
differenzierbare Abbildung, 53
differenzierbare Stuktur, 52
differenzierbarer Schnitt in das Tangentialbündel, *siehe* differenzierbares Vektorfeld
differenzierbares Vektorfeld, 59
Drall, 34
dritte Fundamentalform, 19
Dupinsche Indikatrix, 30

eigentlichen Nabelpunkt, 28
ein-Parameter-Familie, 32
Einbettung, 62
einfach geschlossen, 12
Einstein-Metrik, 75
Einstein-Raum, 75
elliptischen Punkt, 28
erste Fundamentalform, 16
Evolvente, 11
Evulote, 11
Exponentialabbildung, 24, 79, 89

Fadenevolvente, 12
Flachpunkt, 28
Frenet n-Bein, 5
Frenet-Krümmung, 6
Frenet-Kurve, 5
Funktionskeime, *siehe* $\mathcal{F}_p(M)$

Gauß'sche Normalenabbildung, 19
Gauß-Abbildung, 19
Gauß-Krümmung, 24
Geodätische, 23, 78

geodätische Krümmung, 23
geodätische Torsion, 23
Graphenfläche, 30

Haar'sche Maß, 96
halbeinfach, 95
Hauptkrümmungen, 24
Hauptkrümmungsrichtungen, 24
Hauptnormalenvektor, 6
Holomiegruppe, 81
hyperbolischen Punkt, 28
Hyperfläche, 16, 19

Immersion, 62
Integralkurve, 83
invariant, 94
Involute, 11
Isometrie, 18
isometrisch, 45, 78

Kürzeste, 23, 82
    lokal, 82
Karte, 52
Kartenumgebung, 52
Kehllinie, 33
Kettenregel, 62
Killing form, 94
konform, 37
konforme Abbildung, 18
konzugierte Minimalfläche, 40
kovariante Ableitung, 46, 67, 76
Krümmung, 6
Krümmungslinie, 27
Krümmungslinienparametrisierung, 27
Krümmungstensor, 68
kritischer Punkt, 51
kritischer Wert, 51

Länge, 4
Landau-Symbole, 10
Leitkurve, 32
Lie-Algebra, 61, 88
    kommutativ, 91
Lie-Gruppe, 84
    Rang, 92
Lie-Gruppen-Homomorphismus , 90
Lie-Klammer, 50, 61
Lie-Untergruppe, 97
links-invariant, 84
lokale Isometrie, 78
lokaler Fluss, 83
Lokalkürzeste, 23
Lorentz-Metrik, 66

Mannigfaltigkeit, 52
    affin, 54
    differenzierbare, 52
    mit konformer Struktur, 54
    n-, 52
    orientierbar, 64
    orientiert, 54, 64
    Produkt, 59
    reell analytisch, 54
    topologische, 52
Maximal, 79
Menge offenen Umgebungen von p, *siehe* $\mathcal{O}(p)$
Minimalfläche, 35
mittlere Krümmung, 24

Nabelpunkt, 28
nach Bogenlänge parametrisiert, 5
natürliche Basis, 16, 56
natürlichen Basis, 20
nicht ausgeartet, 65
nicht zylindrisch, 33
Normalebene, 11
Normalkrümmung, 22
Normalkrümmung der Kurve, 23
Nullgeodätische, 80
nullhomotop, 39

orientierungserhaltend, 4
orientierungsumkehrend, 4

parabolischen Punkt, 28

parallel, 47
parallel längs, 47
parallelisierbar, 59
Parallelverschiebung, 79
Parameterbereich, 52
Parameterlinien, 27
Parametertransformation, 16
parametrisierte (C^k-)Kurve, 4
Parametrisierung, 52

Raumform, 72
  elliptisch, 73
  flach, 73
  hyperbolisch, 73
Regelfläche, 32
Regelgeraden, 32
regulär, 3, 4
reguläre Kurve, 4
reguläre Parametertransformation, 4
regulärer Wert, 51
rektifizierende Ebene, 11
Ricci-
  Identität, 67
  Krümmung, 74
  Tensor, 73
Richtungsableitungen, 56
Riemann-Krümmung, *siehe* Schnittkrümmung
Riemannsche Mannigfaltigkeit, 65
  semi-, 65
Riemannsche Metrik, 65
  bi-invariant, 85
  links-invariant, 85
  rechts-invariant, 85
Rotationsindex, 13

Scheitel, 14
Schmiegebene, 6
Schmieghyperebene, 6
Schmiegraum, 6
Schnittkrümmung, 72
Schraubenlinie, 9
Schraubregelfläche, 34
Signatur, 65
Skalarkrümmung, 73
Standardstruktur, 53
Striktionslinie, 33
Submersion, 62

Tangente, 6
Tangentenbild, 12
Tangenteneinheitsvektor, 6
Tangentenfläche, 34
Tangentenumlaufzahl, 13
tangential, 46
Tangentialbündel, *siehe* TM
Tangentialraum, *siehe* $T_p(M)$
Tangentialvektoren, 56
Tensor, 68
  Spur, 73
Tensorfeld, 68
Torse, 35
Torsion, 6
torsionsfrei, 67
Torsionstensor, 68
Torus, 92
  maximal, 92
totale Absolutkrümmung, 13
Totalraum, 58
Trajektorie, 83
Transformationsregel (bei Kartenwechsel), 57

Umlaufzahl, 13
Untermannigfaltigkeit, 62

Vektorfeld, 46, *siehe* differenzierbares Vektorfeld
  längs, 78
  längs parallel, 78
Vektorraumbündel, 58
Verteilungsparameter, 34
vollständig, 83

Weingarten-Abbildung, 19
winkeltreu, 54

Zentralpunkte, 33

Zentrum, 95
Zentrum $Z(G)$, 95
Zusammenhang
    linearer, 67
    Riemannscher, 67
    von Levi-Civita, 67
zweite Fundamentalform, 19